

**Государственная корпорация по атомной энергии «Росатом»
АО ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ —
ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. И. ЛЕЙПУНСКОГО**

ФЭИ – 3271

Кириллов П.Л., Терентьева М.И.

**ТУРБУЛЕНТНОЕ ЧИСЛО ПРАНДТЛЯ.
(ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОСТЬ)**

Обнинск — 2017

Кириллов П.Л., Терентьева М.И.

Турбулентное число Прандтля. (История и современность).

ФЭИ – 3271. Обнинск: ФЭИ, 2017. – 56 с.

Основная идея настоящей работы, имеющей в значительной степени обзорный характер, — обоснование прямого использования экспериментальных профилей распределения температуры и скорости для определения характеристик интенсивности теплообмена. Такой подход позволяет определять эти данные без введения коэффициентов турбулентного переноса тепла (a_T) и количества движения (v_T), а также турбулентного числа Прандтля (Pr_T).

Как правило, значения коэффициентов a_T и v_T получают путем дифференцирования профилей скорости и температуры, что всегда сопровождается существенными погрешностями. Введение турбулентного числа Прандтля, равного отношению этих коэффициентов ($Pr_T = v_T / a_T$), вызывает еще большую погрешность при дальнейших расчетах.

Поэтому существующая практика применения в расчетных кодах CFD различных корреляций для числа Pr_T представляется малопродуктивной. Рассмотрение совокупности результатов многочисленных исследований по турбулентному пограничному слою для различных сред, выполненных зарубежными и российскими исследователями, начиная с 50-х годов прошлого века, подтверждает правильность вышеуказанного подхода.

СОДЕРЖАНИЕ

Условные обозначения	4
Введение	5
1. Структура турбулентного пограничного слоя. Коэффициенты турбулентного обмена	6
1.1. Основные физические процессы в пограничном слое и его структура	6
1.2. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии	11
1.3. Оценки коэффициентов турбулентного обмена и турбулентного числа Прандтля	14
1.3.1. Анизотропный турбулентный поток. Анизотропия коэффициентов турбулентного обмена	14
1.3.2. Влияние теплофизических свойств поверхности на коэффициенты турбулентного обмена	15
1.3.3. Оценки турбулентного числа Прандтля	17
1.3.4. Аналитические расчеты турбулентного числа Прандтля	18
2. О распределениях скорости и температуры в турбулентном потоке среды в трубе	24
2.1. Распределения (профили) скорости	24
2.2. Распределения температуры и законы теплообмена	28
2.2.1. Распределения (профили) температуры	28
2.2.2. Распределения температуры в потоках жидких металлов ($Pr \ll 1$)	35
2.2.3. Распределения температуры в потоках сред при $Pr \geq 1$	40
Выводы	44
Список литературы	46

Условные обозначения

$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$	– молекулярная температуропроводность, м ² /с
$a_T = \frac{\overline{w'_r \cdot T'}}{\partial T / \partial r}$	– турбулентная температуропроводность, м ² /с
C_p	– удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг К)
k	– волновое число, 1/м
$Pr = \nu / a$	– число Прандтля
$Pr_T = \nu_T / a_T$	– турбулентное число Прандтля
q	– плотность теплового потока, Вт/м ²
Re	– число Рейнольдса
$R = r/r_0$	– безразмерный радиус
$r_0 = d/2$	– радиус трубы, м
T	– температура, К
$\bar{T}, T_w$	– средняя температура потока и температура внутренней поверхности стенки, К
$T_* = \frac{q}{\rho \cdot C_p \cdot v_*}$	– масштаб температуры, К
$T^+ = \frac{T - T_0}{T_*}$	– безразмерная температура
u, w	– продольная скорость, м/с
v	– поперечная скорость, м/с
u', v'	– продольная и поперечная пульсации скорости, м/с
$w_x, \bar{w}$	– локальная и средняя скорости потока, м/с
x	– продольная координата, м
y	– координата в нормальном направлении, м
$y^+ = \frac{y \cdot v_*}{\nu}$	– безразмерная координата

Греческие обозначения

α	– коэффициент теплоотдачи, Вт/(м ² К)
ε	– удельная диссипация энергии, м ² /с ³
λ	– коэффициент теплопроводности, Вт/(м К)
λ_t	– турбулентная теплопроводность, Вт/(м К)
μ	– динамическая вязкость, Па·с
μ_t	– турбулентная динамическая вязкость, Па·с
$\nu = \mu/\rho$	– кинематическая вязкость, м ² /с
$v_* = \sqrt{\tau/\rho}$	– динамическая скорость (скорость трения), м/с
$\nu_T = \frac{\overline{w'_x \cdot w'_r}}{\partial w / \partial r}$	– турбулентная вязкость (кинематический коэффициент турбулентного переноса количества движения), м ² /с
ρ	– плотность среды, кг/м ³
τ	– касательное напряжение, Н/м ²
ξ	– коэффициент сопротивления трения

Примечание: В зарубежной литературе вместо a_t используют ε_k – «вихревая температуропроводность», вместо ν_t – величина ε_m – «вихревая вязкость», и т. д.

ВВЕДЕНИЕ

Почти четверть века назад в журнале по теплообмену ASME¹ была опубликована статья «Турбулентное число Прандтля — где мы находимся?» [1]. В ней изложена обзорная лекция заслуженного профессора Стендфордского университета Уильяма Кейса, прочитанная им в 1992 году при вручении ему премии имени Макса Якоба². Предыдущий обзор результатов был выполнен А. Рейнольдсом примерно на 20 лет раньше [2]. В этом обзоре содержится описание более 30 различных методов определения турбулентного числа Прандтля, включая чисто эмпирические и сложные аналитические корреляции, основанные на уравнениях напряжений О. Рейнольдса.

После публикации Кейса, основанной в значительной степени лишь на результатах работ зарубежных исследователей, прошло еще более 20 лет. Что изменилось за прошедший период, есть ли новые результаты, и где мы находимся в настоящее время? В заглавии статьи Кейса содержится вопрос. Спрашивается, почему не только в 50–90-е годы прошлого века, но и сегодня это число подобия привлекает внимание ученых? По-видимому, тогда нельзя было дать однозначного ответа [3, 4].

Неослабевающий интерес к проблемам процессов тепло и массопереноса в средах с разными числами Прандтля, а именно: жидкие металлы ($Pr = 0,005 \div 0,03$), газы и вода ($Pr \sim 1 \div 10$), газовые смеси ($Pr = 0,1 \div 0,7$), органические среды ($Pr \sim 10 \div 200$) и др., применительно к современной технике отчетливо подтверждается рядом публикаций последних лет [5–11].

При анализе двумерного пограничного слоя в случае продольного течения среды в трубе или пучке труб (стержней), большое значение имеет учет переноса тепла по нормали к основному направлению потока. Применение комплексных моделей турбулентности оказывается излишне сложным для большинства инженерных расчетов. В этом случае необходимо использовать большое число констант, определяемых экспериментальным путем, но даже такой подход не гарантирует достижения удовлетворительных результатов.

Указанная проблема решается, если при анализе процессов вихревого переноса (количества движения, тепла и массы) вводится понятие длины пути смешения³ или применяется так называемая k – ϵ модель турбулентности. При этом перенос тепла оценивается с использованием турбулентного числа Прандтля (Pr_T), которое обычно рассматривается как универсальный параметр, отображающий взаимосвязь между турбулентным переносом количества движения и тепла:

$$Pr_T = \nu_T / a_T \quad (1.1)$$

¹ ASME – American Society of Mechanical Engineers (Американское общество инженеров-механиков).

² Макс Якоб (Max Jacob, 20.07.1879–04.01.1955) – немецкий теплофизик). Премия его имени, учрежденная ASME в его честь как пионера науки о теплообмене; присуждается ежегодно. В России этой премии были удостоены С.С. Кутателадзе (1969), А.И. Леонтьев (1998).

³ Длина пути смешения – длина пути вихря от его возникновения до потери индивидуальности (его исчезновения).

Турбулентное число Прандтля отражает сложную физическую картину распространения тепла между турбулентными вихрями и является по существу функцией, которая зависит от чисел Рейнольдса, Прандтля и теплофизических характеристик потока теплоносителя. Экспериментальные измерения действительно показали, что значения Pr_T зависят от чисел Re , Pr и расстояния от стенки, т. е. изменяется не только по глубине пограничного слоя, но и по сечению потока в различных направлениях. Ряд интересных подходов к вычислению турбулентного числа Прандтля был предложен Кутателадзе [12] и Миллионщиковым [13], но в эти работы не вошли результаты более поздних исследований (1970–1979 гг.), которые можно найти в [14, 15].

1. СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

1.1. Основные физические процессы в пограничном слое и его структура

В структуре турбулентного пограничного слоя (рис. 1) принято выделять пристенную область (I) с вязким подслоем ($y^+ \leq 5$), буферным слоем ($y^+ = 5 \div 30$) и слоем с логарифмическим распределением скорости ($y^+ \cong 30 \div 300$) и внешнюю область (II). Пограничный слой представляет собой динамическую систему, в которой энергия течения проходит стадию генерации энергии турбулентности, ее перенос и вязкую диссипацию.

При турбулентном течении в гладких каналах основная часть гидравлических потерь расходуется на порождение турбулентности около стенки в зоне максимальных пульсаций скорости и температуры, где $y^+ \approx 20 \div 60$. Доля термического сопротивления отдельных слоев турбулентного потока при $Re \cong 10^4$ составляет: в вязком подслое $\sim 30\%$, переходном слое ($y^+ = 5 \div 30$) $\sim 55\%$, ядре потока ($y^+ > 30-40$) $\sim 15\%$.

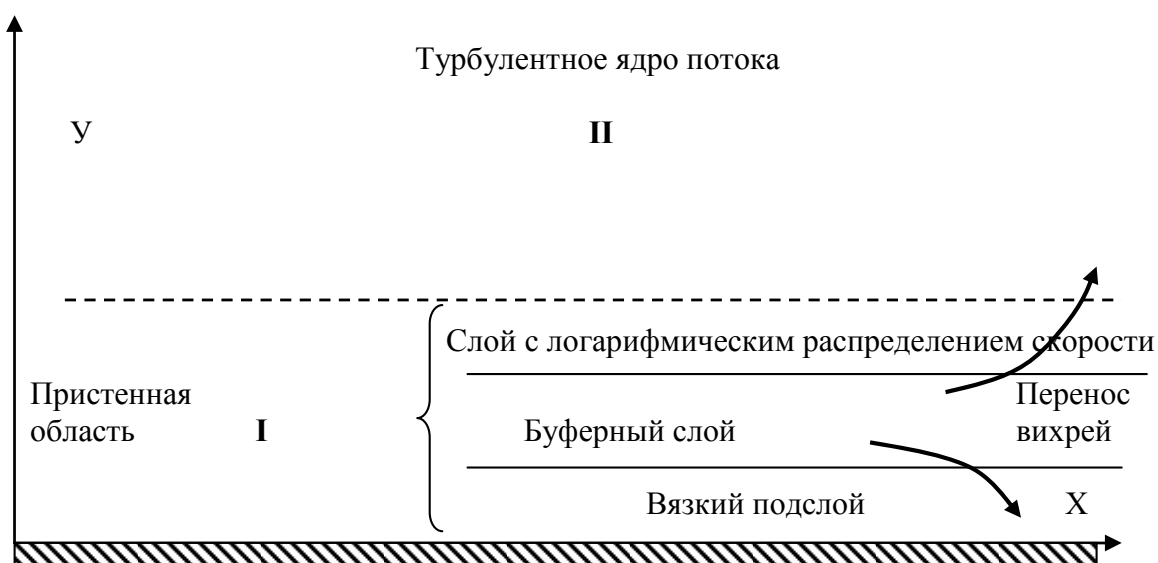


Рис. 1. Схема потока при турбулентном течении

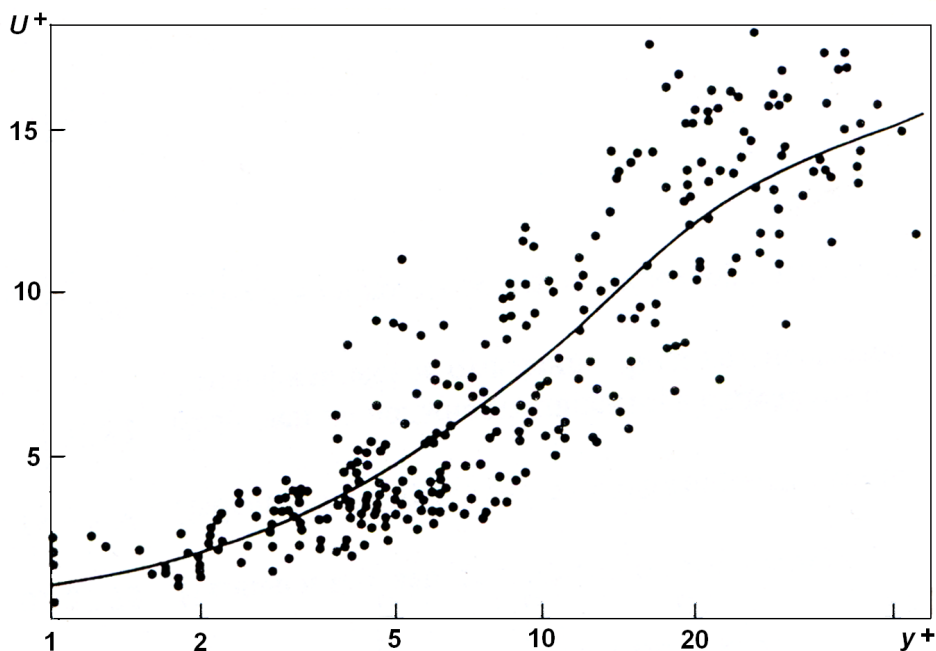


Рис. 2. Результаты измерения мгновенных значений скорости в пристеночной области при турбулентном течении в цилиндрической трубе. $Re = 12000$ [8]: • – значения мгновенной скорости, ———— – профиль осредненной скорости

Одним из важных результатов первоначальных исследований 1950-60 гг. было установление нестационарности продольной составляющей скорости, то есть ее пульсаций, соизмеримых с местной осредненной скоростью потока (рис. 2) [16]. Для вязкого подслоя, не являющегося ни ламинарным, ни установившимся, наблюдается его периодическое нарастание, а затем разрушение вследствие механизма неустойчивости.

Начальная фаза производства турбулентных вихрей состоит в образовании заторможенной области вблизи поверхности, когда образуется перегиб в профиле скорости, и $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \approx 0$. В ходе второй фазы происходит образование вихря, выброс его от стенки с последующим разрушением.

Указанные явления наблюдались многими исследователями в потоке воздуха при визуализации методом термоанемометрии [17–20], а также в потоке воды – методом водородных пузырьков и краски [21]. Обработка результатов исследований [17, 18] позволила установить, что средний период цикла выбросов ($\bar{t}^+$) подчиняется соотношению:

$$\bar{t}^+ = \frac{\bar{t} \cdot v_*}{\nu} = 0,65 Re_\theta^{0,75}, \quad (1.2)$$

где t – время, $Re_\theta = \frac{\theta \cdot v_*}{\nu}$ и θ – температура.

По мере развития многочисленных исследований в 60–90-е годы XX века и более современных работ были рассмотрены различные возможные схемы образова-

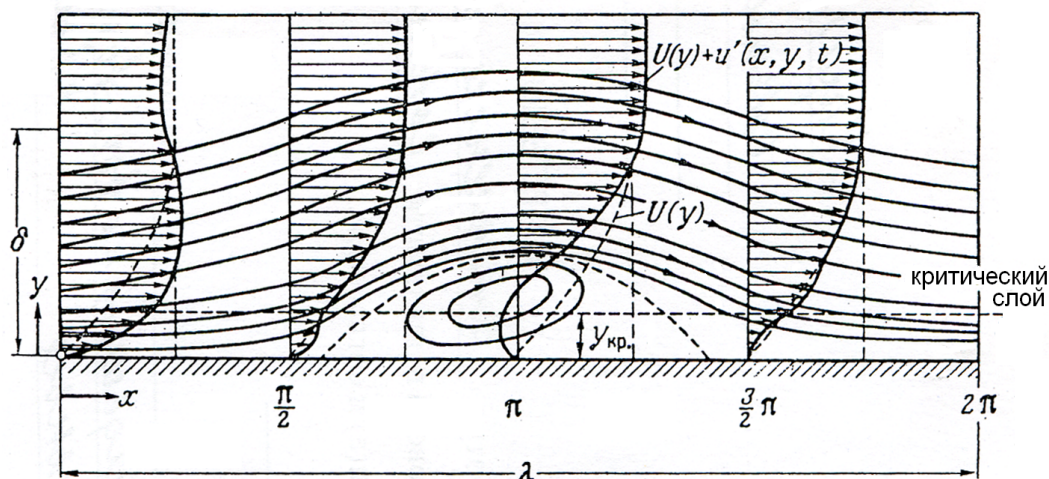


Рис. 3. Картина линий тока и распределение скоростей для нейтрального колебания в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке [14]

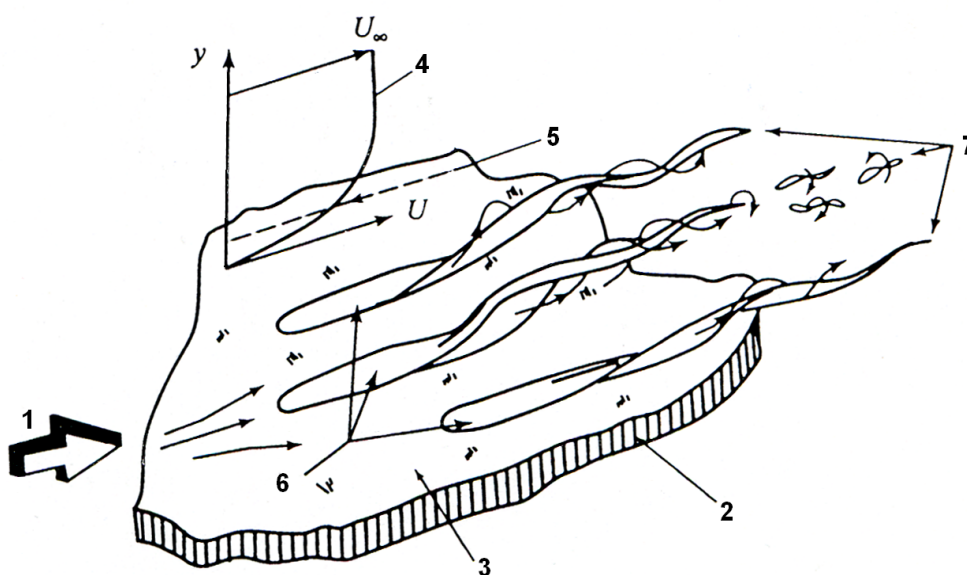


Рис. 4. Схема течения в пристеночной области турбулентного пограничного слоя [17]:
 1 – направление потока; 2 – часть стенки; 3 – обтекаемая поверхность (стенка); 4 – турбулентный профиль скорости; 5 – граница вязкого подслоя; 6 – пятна возмущения; 7 – разрушение вихревых элементов

ния вихрей в пристенной зоне. В книге Шлихтинга о возникновении турбулентности [22] представлены изображения линий тока и формы распределения скорости в пограничном слое при продольном обтекании плоской пластины, где периодически возникают турбулентные вихри (рис. 3).

Анри Пуанкаре считал, что «турбулентность легко увидеть, но сложно понять» [23]. Сам Пуанкаре много размышлял о предмете гидродинамики и даже преподавал специальный курс по вихрям. Но теорию турбулентности он так и не отважился создать. Немецкий физик В. Гейзенберг, основатель квантовой механики, предложил свою теорию турбулентности, которая, однако, не получила всеобщего признания. Недаром в свое время говорили, что турбулентность — это кладбище теорий [24].

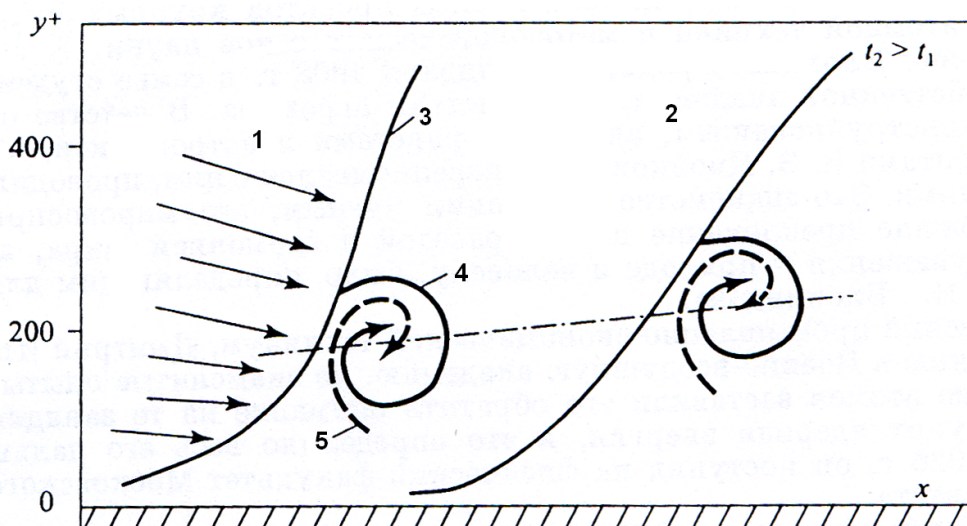


Рис. 5. Схема образования поперечно ориентированного вихря [19]:

1 – область ускоренной жидкости; 2 – область замедленной жидкости; 3 – граница;
4 – ускоренная жидкость; 5 – замедленная жидкость

Впоследствии было обнаружено, что течение в области вязкого подслоя является не двумерным, а трехмерным с появлением характерных возмущений в виде пятен или продольных, медленно движущихся струй типа вихревых жгутов (рис. 4) [17].

В [19, 26] были проведены детальные исследования структуры течения вблизи стенки. Процесс обновления вязкого подслоя – от спокойного течения к образованию крупных возмущений (вихрей) показан на рис. 5. Важным моментом этого процесса являются неустойчивые взаимодействия между зонами ускоренной и замедленной жидкости. В [27] предполагается, что образование поперечно ориентированного вихря обусловлено движением ускоренной жидкости. В то же время замедленная жидкость, хотя и участвует в образовании данного вихря, однако не является причиной его возникновения.

Вихрь смещается в направлении потока со скоростью несколько меньшей, чем местная средняя скорость течения. Образование вихря связано с появлением точки перегиба в мгновенном профиле скорости [19]. По мере движения вниз по потоку этот вихрь постепенно удаляется от стенки. Особо отмечается четкая связь между появлением поперечно ориентированных вихрей и выбросами замедленной жидкости из пристеночной области. Наличие вихрей с направлением вращения, указанным на рис. 5, способствует выбросам малых объемов замедленной жидкости во внешнюю область течения и вторжениям ускоренной жидкости из внешней области в пристеночную область.

Общая схема взаимодействия вихрей, представленная на рис. 6, разработана на основе результатов исследований 60–70-х годов прошлого столетия [28–33]. Уточненная схема процессов в пристенном слое турбулентного потока, учитывающая современные представления, показана на рис. 7 [34]. Дальнейший анализ результатов исследований по механизму порождения турбулентности показал, что возникающие в пристенных потоках вихревые структуры являются универсальными в различных

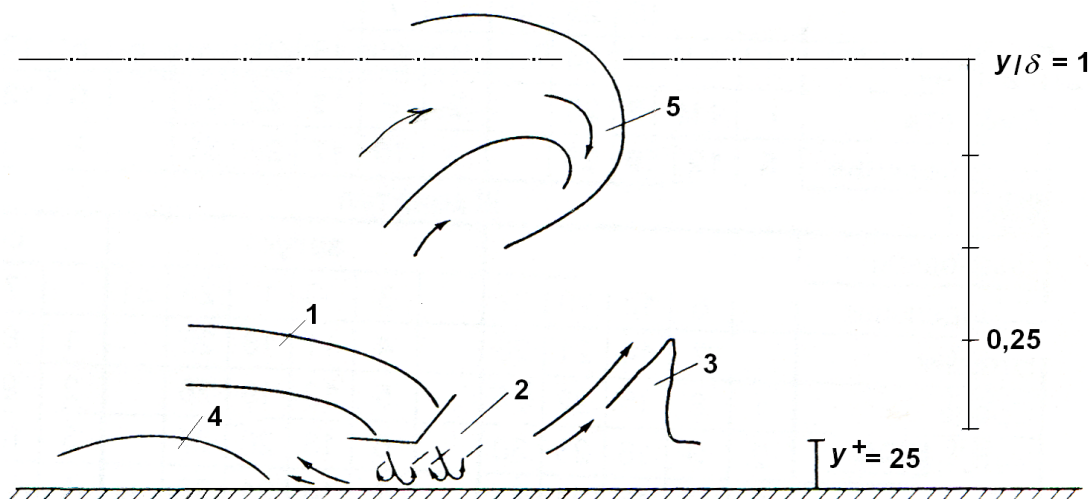


Рис. 6. Общая схема вихревого взаимодействия в пограничном слое [25]:
1 – соударение; 2 – распад; 3 – выброс; 4 – замедление; 5 – выброс во внешней области

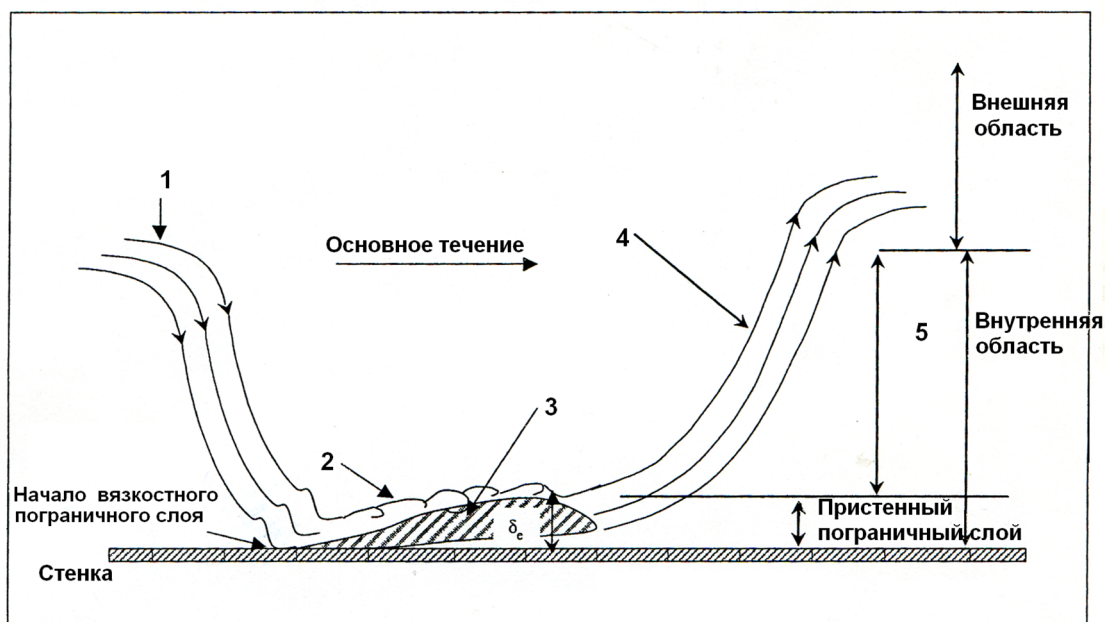


Рис. 7. Уточненная схема процессов в пристеночной области турбулентного потока, учитывающая современные представления [34]: 1 – вброс вихря (траектории переноса вихря); 2 – развитие вихря; 3 – подъем, развитие вихревого выброса в пограничном слое; 4 – эжекция (выброс); 5 – область логарифмического закона

турбулентных течениях (пограничных слоях, каналах, трубах) [6, 35]. В частности, применение специальных разрушителей крупных вихрей, так называемых устройств LEBU⁴, приводит к заметному снижению вязкого трения на стенке [36].

Все исследования показывают, что основная доля энергии турбулентности (k) генерируется в буферном слое (рис. 8), откуда она переносится к стенке и внешней границе пограничного слоя [33]. По современным представлениям внутри турбу-

⁴ Термин LEBU (Large Eddies Break-Up) используется в устройствах для воздействия на турбулентность пристенных течений, представляющих собой тонкие пластины, которые устанавливаются во внешней зоне пограничного слоя. Они предназначены для разрушения присущих турбулентному движению крупномасштабных вихревых образований [36].

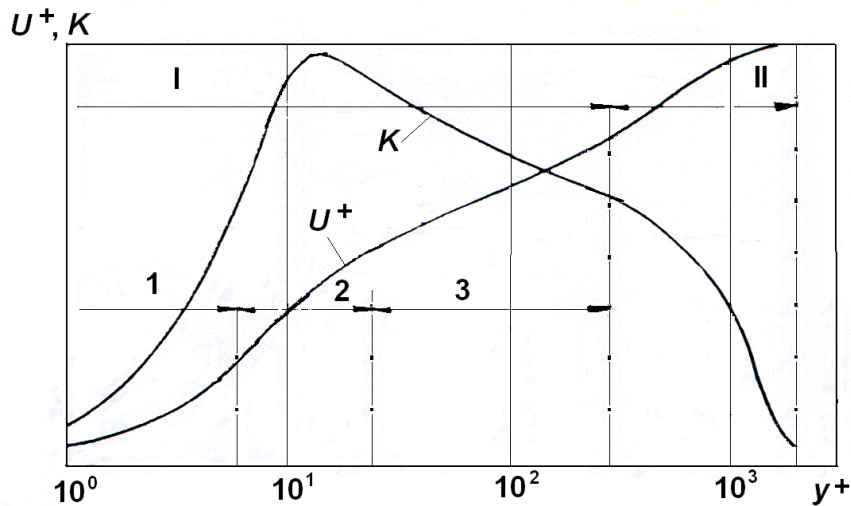


Рис. 8. Закономерности изменения средней скорости и энергии турбулентности в поперечном сечении пограничного слоя [33] : I, II – пристенная и внешняя области соответственно; 1 – вязкий подслой; 2 – буферный слой; 3 – слой с логарифмическим распределением скорости (K – интенсивность генерации энергии турбулентности)

лентного пограничного слоя существуют определенные структуры, ответственные за процесс генерации турбулентности и перенос импульса и тепла. Знание о свойствах этих структур позволяет найти рациональные подходы к решению проблем расчета интенсивности теплообмена.

Однако в одном из последних обзоров [15] указывается, что «общепринятая концепция дробления вихрей, как главного механизма турбулентности, не только не может объяснить ряд наблюдаемых фактов, но и содержит внутренние противоречия». Авторы обзора считают, что «определяющим процессом является не распад, а растяжение вихрей. Эволюция растягивающихся вихревых нитей – филаментов – и их свойства выводятся из уравнений Навье-Стокса». Эта модель позволяет объяснить характеристики скорости и перемежаемость, придает физический смысл теории.

1.2. Уравнения сохранения массы, количества движения и энергии

Для случая постоянных свойств теплоносителя система дифференциальных уравнений сохранения пограничного слоя в двумерных координатах⁵ имеет вид:

уравнение массы (неразрывности)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1.3}$$

уравнение количества движения (импульса)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right); \tag{1.4}$$

⁵ Для случая течения в круглых трубах необходимо использовать цилиндрические координаты.

уравнение энергии

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial t}{\partial y} - \overline{t'v'} \right), \quad (1.5)$$

где t и t' – температура и пульсация температуры [37].

Согласно подходу Рейнольдса, мгновенные значения гидродинамических параметров потока представляются в виде суммы осредненной величины (во времени) и ее пульсационной составляющей. Фактически это означает, что гидродинамическая величина является случайной, осреднение которой во времени дает ее математическое ожидание, а пульсационная составляющая – дисперсия случайной величины. При решении уравнений (1.4 и 1.5) приходится выдвигать определенные гипотезы относительно пульсаций скорости и температуры. Вследствие этого вводятся коэффициенты турбулентного обмена на основании соотношений:

$$\overline{u'v'} = -v_T \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.6)$$

$$\overline{t'v'} = -a_T \frac{\partial t}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Если подставить уравнения (1.6 и 1.7) в (1.4 и 1.5), то можно получить выражение для уравнения энергии:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v \left[\frac{1}{Pr} + \frac{v_T/v}{Pr_T} \right] \frac{\partial t}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + a_T) \frac{\partial t}{\partial y} \right], \quad (1.8)$$

где турбулентное число Прандтля равно:

$$Pr_T = \frac{\overline{u'v'}}{\overline{t'v'}} \frac{\partial t / \partial y}{\partial u / \partial y} = \frac{v_T}{a_T}, \quad (1.9)$$

В соответствии с уравнениями (1.4), (1.5) и (1.9) для определения Pr_T в пограничном слое из экспериментальных данных необходимо измерить в каждой точке такие характеристики как касательные напряжения, плотность теплового потока, градиенты скорости и температуры и их пульсационные составляющие. Однако такие комплексные измерения выполняются редко, так как они вызывают значительные трудности при их реализации. В результате получается большое расхождение данных по значениям турбулентного числа Прандтля (рис. 9) [38–39]. Другая причина наблюдаемого разброса обусловлена необходимостью дифференцирования зависимостей $u = f(y)$ и $t = f(y)$, в ходе которого при определении значений v_T и a_T происходит увеличение погрешности. Как следствие, отношение этих двух величин и конечное число Pr_T определяются с еще большей погрешностью.

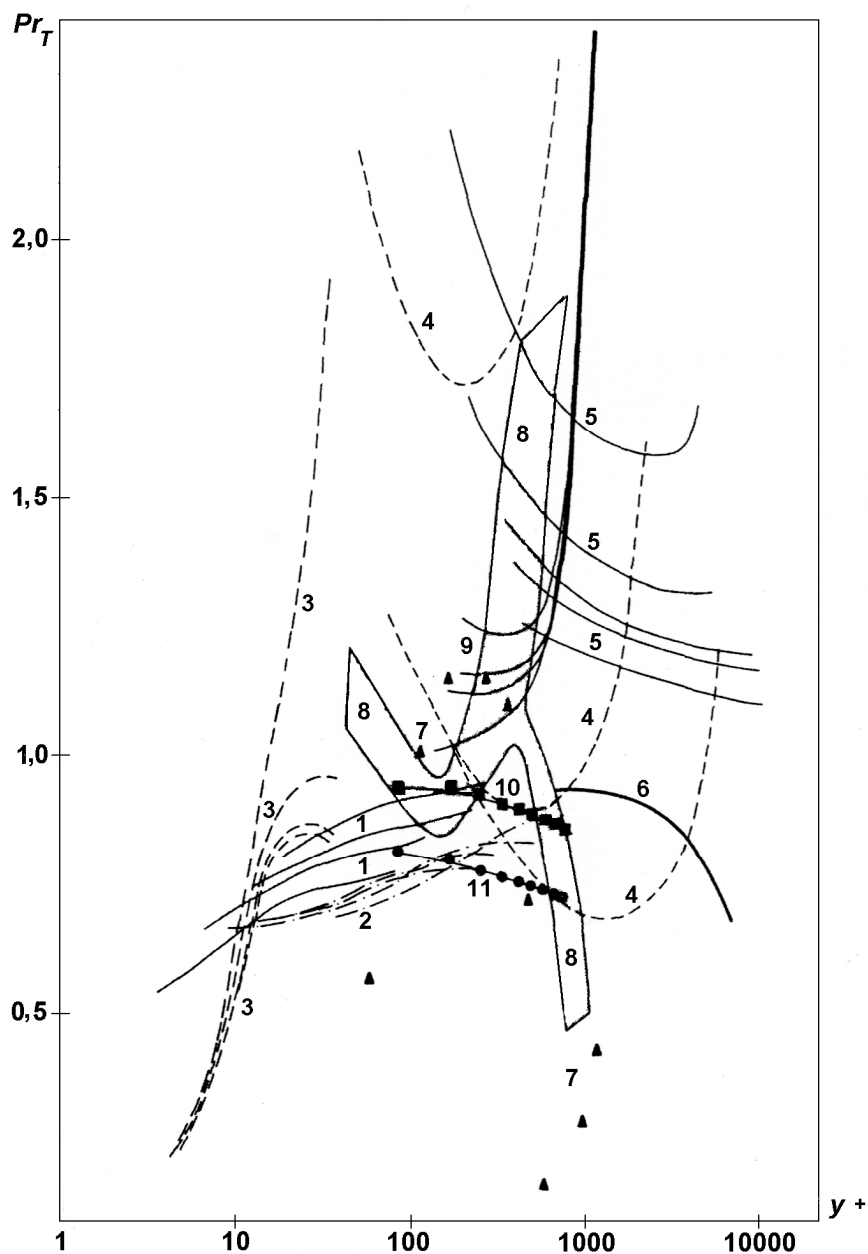


Рис. 9. Зависимость турбулентного числа Прандтля от безразмерного расстояния по экспериментальным данным различных исследователей [38, 39]:

- 1 ——— – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = (0,7 \div 5,3) \cdot 10^4$, прямоугольный канал 305×175 мм [40];
- 2 - · - · - · – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = (1,1 \div 5) \cdot 10^4$, труба диаметром 37,5 мм [41];
- 3 - - - - - – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = (1,1 \div 5) \cdot 10^4$ (корректировка результатов работы [41] с учетом вязкой диссипации энергии) [42];
- 4 - - - - - – ртуть при $Pr = 0,024$ и $Re = (0,37 \div 3,7) \cdot 10^5$, вертикальная труба диаметром 38 мм [43];
- 5 ——— – ртуть при $Pr = 0,02$ и $Re = (2,5 \div 8) \cdot 10^5$, труба диаметром 41 мм [44];
- 6 ——— – воздух при $Pr = 0,7$, $Re = (3,23 \div 3,74) \cdot 10^5$, $M = 0,63 \div 0,87$, труба диаметром 30 мм [45];
- 7 ▲ – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = 3,7 \cdot 10^6$, течение вдоль плоской горизонтальной пластины [46];
- 8 □ – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = (2,5 \div 3,5) \cdot 10^4$, нисходящий поток в трубе диаметром 750 мм [47];
- 9 ——— – ртуть при $Pr = 0,02$ и $Re = (5,4 \div 9,6) \cdot 10^4$, труба [48];
- 10 ■—■ – этиленгликоль при $Pr = 5,7; 14,3$ и $Re = (1 \div 5) \cdot 10^4$, труба диаметром 51,5 мм [49];
- 11 ●—● – воздух при $Pr = 0,7$ и $Re = (1 \div 5) \cdot 10^4$, труба диаметром 51,5 мм [99]

1.3. Оценки коэффициентов турбулентного обмена и турбулентного числа Прандтля

1.3.1. Анизотропный турбулентный поток. Анизотропия коэффициентов турбулентного обмена

При анализе плотности теплового потока и касательного напряжения предполагается справедливость законов аддитивности для переноса количества движения (импульса) и тепла около стенки, а именно:

$$q = -(\lambda + \lambda_T) \frac{dt}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{q}{\rho C_p} = -(a + a_T) \frac{dt}{dy}, \quad (1.10)$$

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{\tau}{\rho} = (v + v_T) \frac{du}{dy}. \quad (1.11)$$

В общем случае турбулентные характеристики потока, включая λ_T , a_T , μ_T , v_T , зависят от безразмерного расстояния y^+ и чисел подобия – Re и Pr .

Турбулентный пограничный слой является анизотропной средой, свойства которой зависят от напряжения. Анизотропия такой турбулентности может быть учтена посредством использования коэффициентов турбулентного переноса импульса (количества движения) и тепла не в форме скаляров, а тензоров (например, второго ранга) [50, 51].

Простейшая форма уравнения температурного поля имеет вид:

$$\rho C_p \frac{d\bar{t}}{d\tau} = \lambda \nabla^2 - \operatorname{div} q_T. \quad (1.12)$$

Здесь $q_T = \rho C_p \overline{u't'}$ – вектор плотности турбулентного теплового потока, u' и t' – пульсации скорости и температуры. В [52] по измеренным полям температуры в трубе, где температура стенки зависит от угла ϕ , были вычислены коэффициенты турбулентной теплопроводности с учетом анизотропии. Аналогичные результаты, относящиеся к массопереносу, были определены в [53].

Для опытов, описанных в [54], уравнение для плотности турбулентного теплового потока q_T может быть записано в виде:

$$q_{T,x} = -\lambda_{T,x} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} - \lambda_{T,r} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r}, \quad (1.13)$$

где производная $\partial \bar{t} / \partial x$ вычисляется по уравнению теплового баланса, исходя из расхода газа и теплового потока, а величина $\partial \bar{t} / \partial r$ – по измеренному полю температуры.

Анализ публикаций, имеющих в настоящее время, показывает, что для турбулентных течений типа пограничного слоя и в трубах характерна значительная анизотропия коэффициентов турбулентного обмена. В [50, 51, 55, 56] обсуждаются сложности замыкания уравнения (1.12), независимо от того принимаются ли коэф-

фициенты турбулентного теплообмена скалярами или тензорами. В последнем случае возникают трудности с вычислением компонент тензора. Еще большую трудность представляет получение экспериментальных данных по коэффициентам турбулентного обмена по разным направлениям (x, y, z или φ).

На рис. 10 представлены качественные результаты по анизотропии турбулентной теплопроводности, в виде отношений $\lambda_{T,x}/\lambda_{T,y}$ и $\lambda_{T,\varphi}/\lambda_{T,y}$. Здесь $\lambda_{T,x}$, $\lambda_{T,y}$ и $\lambda_{T,\varphi}$ – продольная, поперечная и тангенциальные турбулентные теплопроводности, в зависимости от безразмерной координаты $Y = y/r_0$, являющейся безразмерным расстоянием от стенки в круглой трубе с радиусом r_0 . Отношение $\lambda_{T,x}/\lambda_{T,y}$ вычислялось по опытным

значениям $\langle w_x' t' \rangle$, полученных в экспериментах [54, 57, 58], а отношение $\lambda_{T,\varphi}/\lambda_{T,y}$ – на основе опытных данных [52, 53]. Видно, что значение $\lambda_{T,x}$ на два-три порядка, а $\lambda_{T,\varphi}$ на один-два порядка превышают поперечную теплопроводность $\lambda_{T,y}$ [56].

Турбулентная вязкость $\nu_{T,y}/(\nu_* r_0)$ изменяется по сечению трубы.

$$\nu_{T,y} = C_{D3} E^2 / D, \tag{1.14}$$

где E – турбулентная энергия, D – скорость диссипации, $C_{D3} = 0,09$ [56]. Хотя предложенные соотношения (1.12) и (1.13) и позволяют объяснить некоторые факты, но инженерные расчеты с использованием этих уравнений для учета эффектов анизотропии величин ν_T и a_T пока не обладают достаточно приемлемой точностью [55, 56].

1.3.2. Влияние теплофизических свойств поверхности на коэффициенты турбулентного обмена

В [59–64] указывается на результаты измерений пульсаций температуры вблизи обогреваемых поверхностей с разными теплофизическими свойствами. Если при обтекании гладкой поверхности пульсации скорости на стенке во всех случаях равны нулю, то для нахождения пульсаций температуры необходимо рассматривать сопряженную задачу стенка – поток.

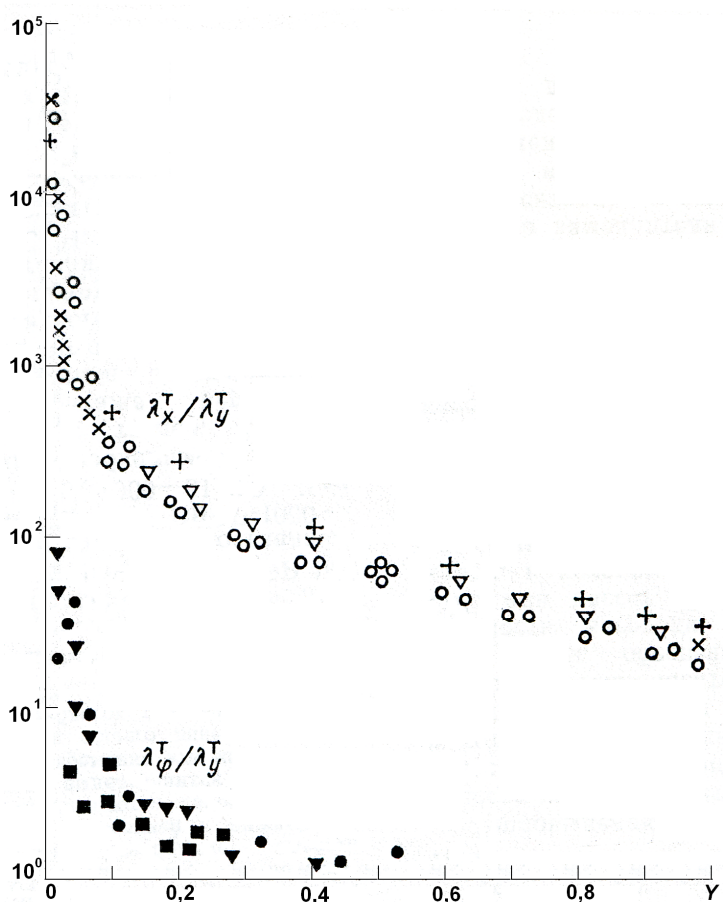


Рис. 10. Анизотропия турбулентной теплопроводности в зависимости от безразмерной координаты в круглой трубе [50, 56]

Предварительные результаты расчетов были опубликованы в [62], а сравнение расчетных и экспериментальных результатов в [63]. Как показано в [59, 64] пульсации температуры вблизи поверхности, обтекаемой жидким металлом, имеют большие значения. Можно ожидать, что материал стенки оказывает влияние на турбулентный перенос тепла в жидких металлах на достаточно больших расстояниях от поверхности. В [59] установлено, что интенсивность пульсаций температуры (σ_t) в стенке линейно зависит от плотности теплового потока ($\sigma_t \sim q$) и отношение $\sigma_t/\Delta t_\alpha$ равно $\approx 0,055$ при $Re = (1 \div 5) \cdot 10^4$, где Δt_α – температурный напор.

В [63] дано аналитическое решение сопряженной задачи о пульсациях температуры в вязком подслое турбулентного потока и в стенке. На основе экспериментальных данных [64] для потока ртути ($Pr = 0,025$) показано, что величина и характер пульсаций температуры вблизи поверхности различны для различных сочетаний материал стенки – жидкость. При этом свойства стенки могут оказывать существенное влияние на спектр и интенсивность пульсаций температуры (рис. 11, 12).

На рисунках представлены зависимости спектров пульсаций температуры (E_t) и их интенсивности (σ_t) от безразмерной угловой частоты (Ω) и безразмерного расстояния от стенки y^+ для трех типов материалов (текстолит, нержавеющая сталь и медь). Детальный анализ влияния материала поверхности на значения v_T и a_T , а, следовательно, и на Pr_T еще предстоит выполнить. Однако обнаруженное влияние свойств материала поверхности на величину пульсаций температуры в потоке указывает на возможное влияние и на значения (а) коэффициент теплоотдачи.

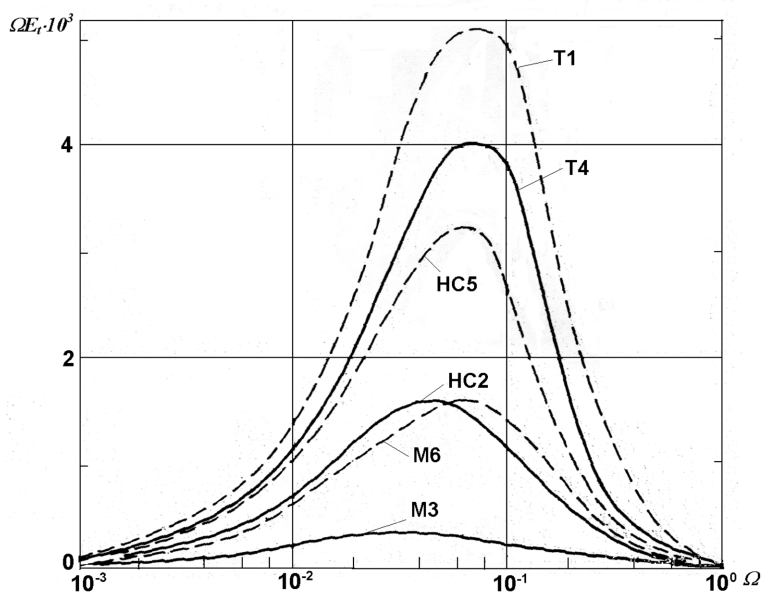


Рис.11. Спектры пульсаций температуры в вязком подслое ртути ($Pr = 0,025$) при обтекании стенок из текстолита (T1, T4), нержавеющей стали (HC2, HC5) и меди (M3, M6); — при $y^+=0$ для T1, HC2, M3; - - - при $y^+=5$ для T4, HC5, M6 [62]

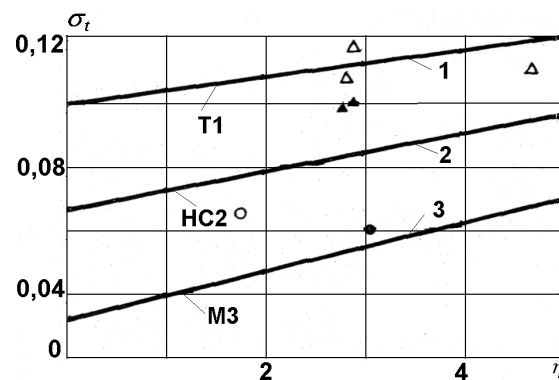


Рис. 12. Изменение интенсивностей пульсаций температуры в вязком подслое ртути ($Pr = 0,025$) при обтекании стенок из текстолита (T1), нержавеющей стали (HC2) и меди (M3):

1, 2, 3 – расчет.

Эксперимент [63]: Δ – при $Re=1,6 \cdot 10^4$ для $q=2,32 \cdot 10^4$ Вт/м²; $\blacktriangle$ – для $q=1,86 \cdot 10^4$ Вт/м² и $q=1,22 \cdot 10^4$ Вт/м²; $\circ$ – при $Re=10^4$ для $q=10,44 \cdot 10^4$ Вт/м²; $\bullet$ – при $Re=10^4$ для $q=2,32 \cdot 10^4$ Вт/м²

1.3.3 Оценки турбулентного числа Прандтля

В монографии Шлихтинга [65] отмечалось, что в расчетах теплообмена «...турбулентное число Прандтля всегда принималось $Pr_T=1$, то есть предполагалось, что коэффициенты турбулентного обмена для импульса и тепла одинаковы. Между тем измерения показывают, что Pr_T отклоняется от единицы». Теплопередачу при $Pr_T \neq 1$ пытались подробно исследовать Райхардт [66], Ротта [67] и другие авторы. Но они опирались в основном на данные, полученные до 60-х годов прошлого столетия.

В простейшей модели пограничного слоя – аналогии Рейнольдса, турбулентные характеристики переноса тепла и количества движения считаются одинаковыми: $\nu_T = a_T$ и $Pr_T = 1$. Вдали от вязкого подслоя при $y^+ > 30$, профиль скорости в турбулентной зоне подчиняется логарифмическому закону, так называемому «закону стенки» [1, 68]:

$$U^+ = A \ln y^+ + B, \tag{1.15}$$

где $U^+ = v/\nu^*$. Профиль температуры также подчиняется аналогичному закону:

$$T^+ = C_1 \ln y^+ + C_2. \tag{1.16}$$

Если продифференцировать уравнения (1.15 и 1.16) с учетом значений безразмерных величин U^+ , T^+ и y^+ , и полученные результаты подставить в (1.9), то в этом случае турбулентное число Прандтля должно быть постоянным:

$$Pr_T \approx \frac{dT/dy}{du/dy} = \frac{dT^+/dy^+}{dU^+/dy^+} \approx \frac{C_1}{A}. \tag{1.17}$$

Рисунок 13, где в полулогарифмических координатах показаны профиль скорости, а также профиль температуры, построенный по экспериментальным данным [69], подтверждает это положение. При этом величина Pr_T определяется по наклону профиля температуры.

Но в зависимости от значения молекулярного числа Прандтля Pr возможны разные соотношения между Pr и Pr_T . Так

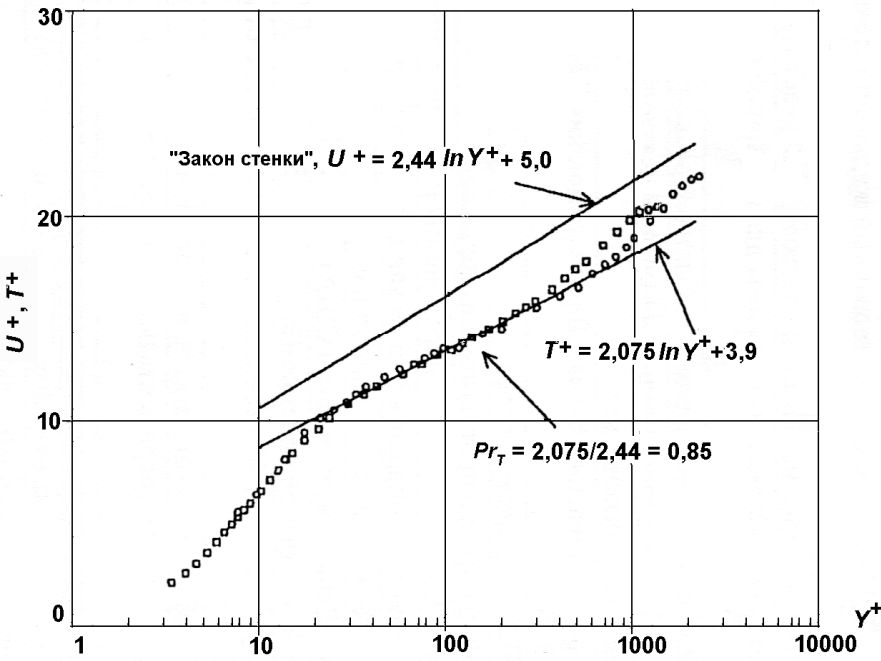


Рис. 13. Определение турбулентного числа Прандтля по наклону профиля температуры, построенного на основе данных двух экспериментов для воздуха

при $Pr \geq 1$ молекулярная вязкость и температуропроводность значительно меньше турбулентных, ($\nu \ll \nu_T$ и $a \ll a_T$), и следовательно, при $y^+ \geq 30$ этими параметрами можно пренебречь. В случае $Pr \ll 1$ для области действия логарифмических законов распределения скорости и температуры наблюдается большой разброс результатов в значениях и зависимостях для Pr_T .

В частности, для потока воздуха при $Pr = 0,7$ и $Re = (6400 \div 15412)$ разные исследователи [1] получили, что $Pr_T = (0,73 \div 0,92)$. В тоже время было найдено, что $Pr_T = 0,85$ для потока воды при $Pr = 5,9$ и $Re = 287$ [51] и для потока трансформаторного масла при $Pr = 64$ и $Re = 195$ [52, 53]. Главной проблемой здесь являлось получение достаточно точного распределения температуры при высоких числах Рейнольдса. В [1] сделано заключение, что в области чисел Прандтля от 0,7 до 100 значение Pr_T может быть равно 0,85.

1.3.4. Аналитические расчеты турбулентного числа Прандтля

Для проведения аналитических расчетов необходимо сначала определить основные параметры, от которых зависит турбулентное число Прандтля, и выработать рациональную схему использования экспериментальных данных. За последние 60 лет были разработаны десятки аналитических моделей. В большинстве из них анализировались экспериментальные данные, полученные для потоков жидких металлов в трубах.

Первые предположения были выполнены Дженкинсом [73], выдвинувшим идею относительно переноса тепла от турбулентного вихря при его движении в потоке. Дженкинс предположил, что такой вихрь отдает или воспринимает свое тепло за счет теплопроводности во время его перемещения по нормали от стенки. Таким образом, согласно гипотезе Дженкинса, и происходит турбулентный перенос тепла. Дальнейшие модели основывались на развитии идеи Дженкинса, однако все они сохраняли константы, которые необходимо было получить путем согласования с экспериментальными данными по законам теплообмена [74].

В России гипотеза Дженкинса использовалась при разработке методики приближенного расчета теплоотдачи расплавленных металлов [75], а также для создания модели турбулентного числа Прандтля [76]. Исходя из предположения, что поле осредненной скорости и данные о временных характеристиках ее пульсаций являются известными, была выполнена постановка обратной задачи математической физики. При этом модель основывалась на учете эффекта потери теплосодержания и импульса турбулентным молементом шарообразной формы на длине пути смещения. Возникновение такого эффекта объяснялось влиянием молекулярной теплопроводности и вязкости теплоносителя [76].

В работе Якхота и др. [77] было представлено аналитическое решение, основанное на «методе ренормализационных групп», который, по-видимому, позволяет исключить необходимость ввода и использования экспериментальных данных. Было

получено довольно сложное соотношение в виде функции, связывающей турбулентные характеристики потока с Pr и $Pr_{эф}$:

$$\frac{v_T}{v} = F(Pr, Pr_{эф}), \tag{1.18}$$

где
$$Pr_{эф} = \frac{v + v_T}{a + a_T}. \tag{1.19}$$

С помощью параметра $Pr_{эф}$ была получена неявная зависимость в широком диапазоне значений чисел Прандтля от 0,0058 до 65:

$$Pr_T = (0,7/Pe_T) + 0,85, \tag{1.20}$$

где $Pe_T = Re \cdot Pr_T$. Дальнейший анализ показал, что лучшее согласие с результатами экспериментов [77, 78, 79] дает выражение:

$$Pr_T = (2/Pe_T) + 0,85. \tag{1.21}$$

Последнее легко приводится к виду квадратичного закона:

$$(Pr_T)^2 - 0,85 Pr_T - 2/Re = 0. \tag{1.22}$$

Если значения Pr_T имеют порядок единицы, то последний член в формуле (1.22) при $Re \geq 10^4$ дает очень малый вклад, и по существу им можно пренебречь. Очевидно, что данная зависимость в двойных логарифмических координатах не может быть достаточно точной. Тем не менее в работе [76] приведены графики из [78, 79, 80], которые показывают хорошее соответствие между расчетными данными по соотношению (1.22) и экспериментальными результатами в логарифмических координатах $Nu-Re$ для сплава NaK и ртути.

На рис. 14 и 15 дано сравнение с опытными данными, полученными при постоянной скорости нагрева Скупинским [78] для NaK при $Pr = 0,0153$, и Буром [79] для NaK и Hg при $Pr = (0,019 \div 0,029)$. На рис. 16 приведены экспериментальные данные

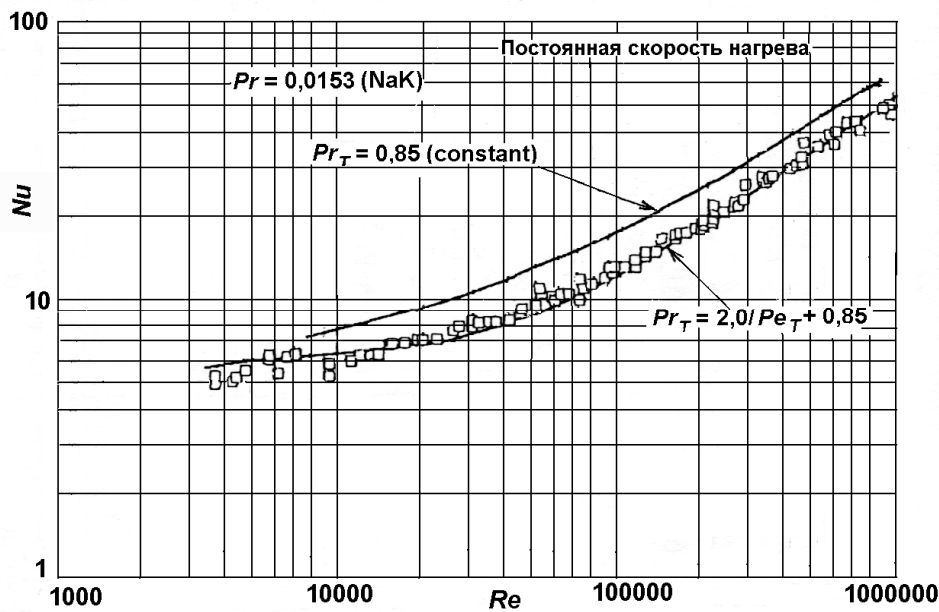


Рис. 14. Экспериментальные данные Скупинского [78] по определению Pr_T в сплаве NaK. Расчетные данные – по уравнению (1.22)

Слейчера [80] для NaK при $Pr = (0,023 \div 0,0245)$, полученные при постоянной температуре поверхности. Аналогичные результаты были получены в ходе экспериментов Петухова с сотрудниками [81, 82]. На рис. 17а показаны результаты расчета турбулентного числа Прандтля для $Pr \geq 7$ и $Re = (10^4 \div 10^6)$, на рис. 17б – для $Pr \leq 0,1$ и $Re = 4 \cdot 10^4$. На рис. 18 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений Pr_T в пристеночной области для $Pr = 8$ и $Re = (1,2 \div 6) \cdot 10^4$ при эксперименте или $Re = (10^4 \div 10^6)$ при расчете [83]. Последние опыты проводились для потока воды в горизонтальном прямоугольном канале.

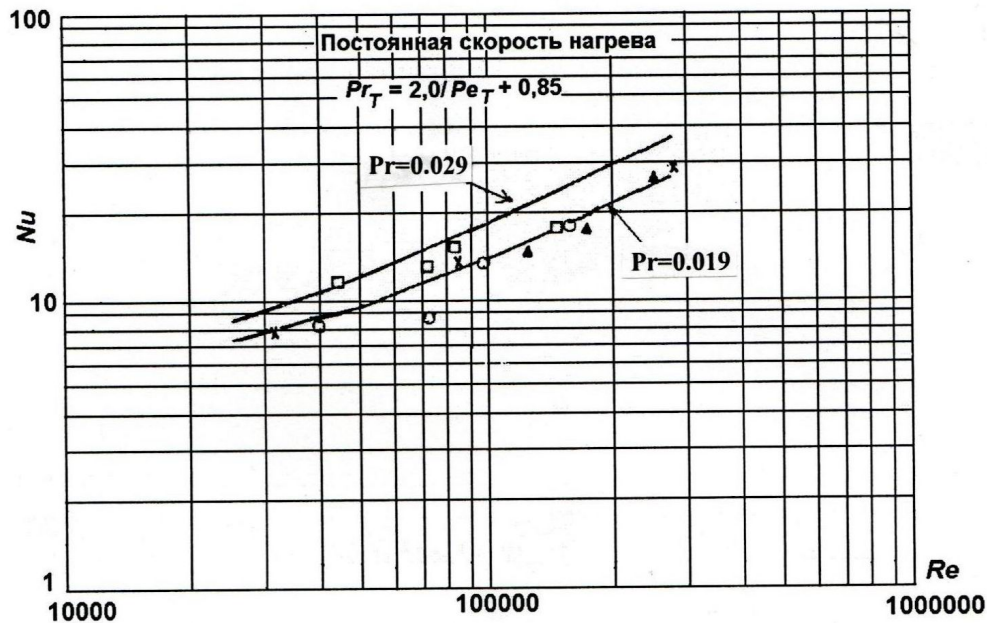


Рис. 15. Экспериментальные данные Бура [79] по определению Pr_T : 1) в сплаве NaK: $\square$ – при $Pr = 0,03$; $\times$ – при $Pr = 0,023 \div 0,025$; $\circ$ – при $Pr = 0,019 \div 0,02$; 2) в Hg: $\blacktriangle$ – при $Pr = 0,021$. Расчетные данные – по уравнению (1.22)

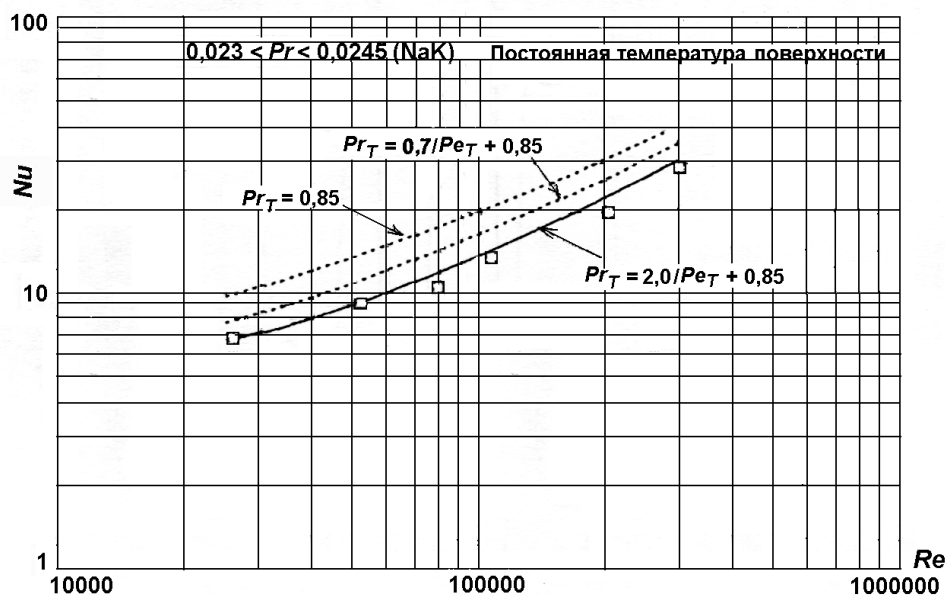


Рис. 16. Экспериментальные данные Слейчера [80] по определению Pr_T в сплаве NaK. Расчетные данные – по уравнению (1.22)

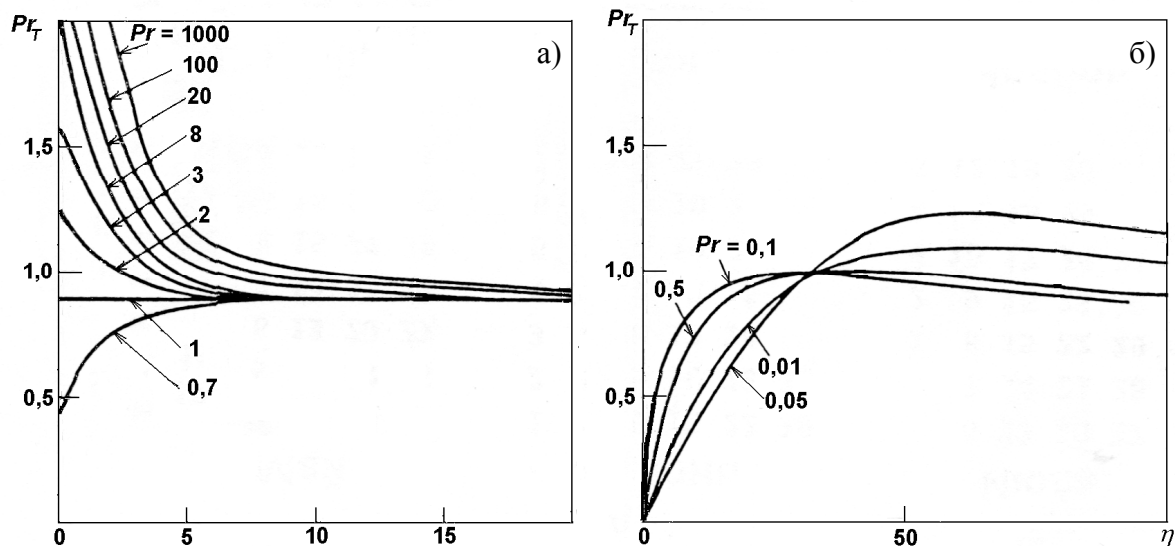


Рис. 17. Результаты расчета Петуховым Б.С. и его сотрудниками [81, 82] турбулентного числа Прандтля по уравнению (1.22):

а) для $Pr \geq 7$ и $Re = (10^4 \div 10^6)$, б) для $Pr = 0,1; 0,05; 0,01; 0,05$ и $Re = 4 \cdot 10^4$

Анализ представлений о турбулентном числе Прандтля, накопленных за период 70-х годов, был выполнен в [84, 85, 86]. Дальнейшее развитие этих представлений дано в фундаментальном труде Кейса и Кроуфорда [87], в котором они предложили более сложное соотношение для Pr_T :

$$Pr_T = F\left(\frac{v_T}{v}, y^+\right). \quad (1.23)$$

При $y^+ > 30$ данное выражение дает значение $Pr_T \approx 0,8$, однако при $y^+ < 10$ наблюдается сильный разброс данных.

По мнению Кейса, поле температуры удовлетворительно описывается следующей зависимостью, отвечающей «закону стенки» [1]:

$$T^+ = 2,075 \ln y^+ + 3,9, \quad (1.24)$$

которая была установлена экспериментально для воздуха при $Pr = 0,7$ (рис. 19).

Здесь приведены данные при $Re_m = 4510$ и $Re_h = 5179$, где Re_m – число Рейнольдса для пограничного слоя толщиной δ_2 при переносе количества движения, Re_h число Рейнольдса для пограничного слоя толщиной Δ_2 при переносе теплоты (энтальпии). Величины Re_m и Re_h определяются соотношениями:

$$Re_m = \delta_2 u_\infty / \nu; \quad Re_h = \Delta_2 u_\infty / \nu, \quad (1.25)$$

где u_∞ – скорость потока на внешнем крае пограничного слоя, ν – коэффициент кинематической вязкости. Один расчет T^+ выполнен при постоянном значении

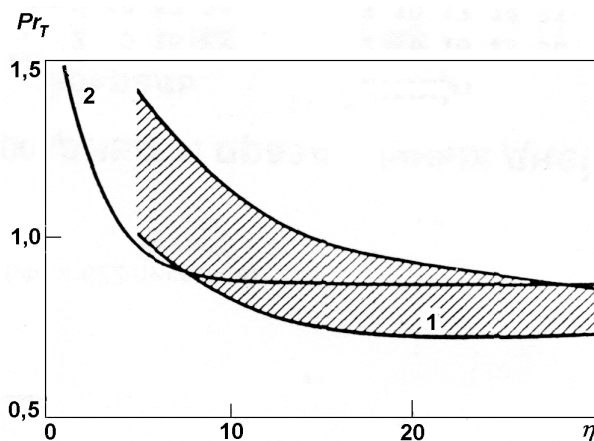


Рис. 18. Сравнение между (1) экспериментальными данными Хабахпашевой [83] на воде для $Pr = 8$ и $Re = (1,2 \div 6) \cdot 10^4$ и (2) расчетными данными по уравнению (1.22) для $Re = (10^4 \div 10^6)$ в пристеночной области

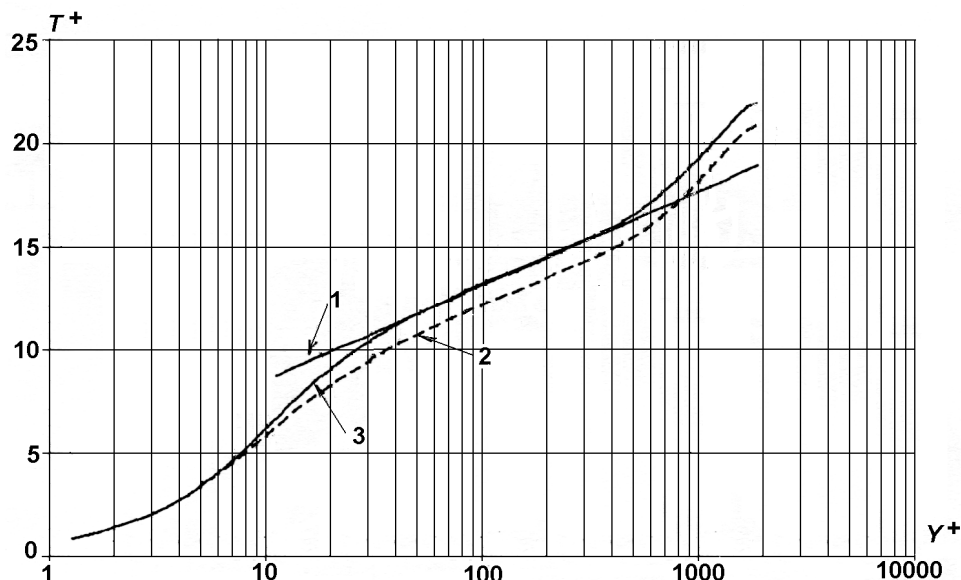


Рис. 19. Влияние турбулентного числа Прандтля на температурный профиль для воздуха при $Pr = 0,7$. 1 – экспериментальные данные, аппроксимируемые уравнением (1.24), 2 – расчетные данные при постоянном $Pr_T = 0,85$, 3 – расчетные данные на основе соотношения (1.23)

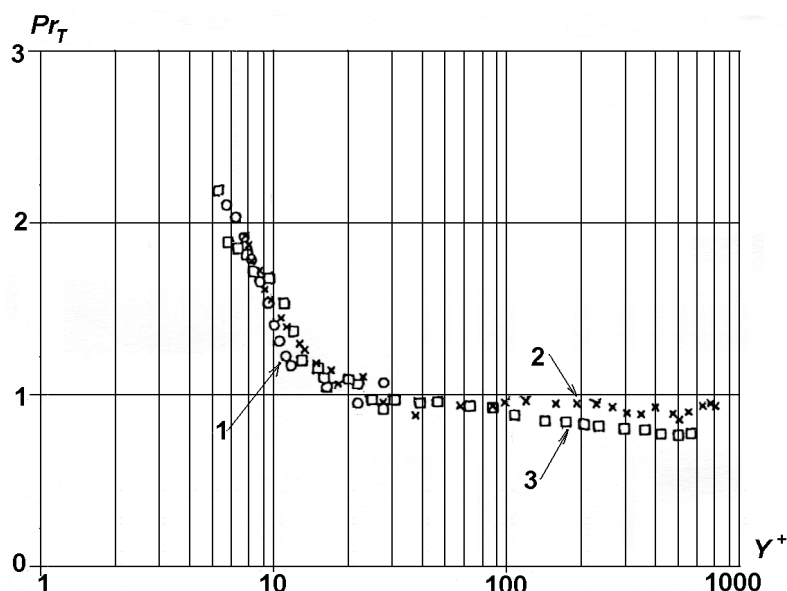


Рис. 20. Сравнение экспериментальных данных по турбулентному числу Прандтля, полученных при $Pr = 0,7$ для воды и воздуха: 1 – вода [70], 2 – воздух [69], 3 – воздух [88]

$Pr_T = 0,85$ на основе модели для длины пути смешения, второй расчет T^+ – при значении Pr_T , определенному по соотношению (1.23).

На рис. 20 приводятся экспериментальные данные Холлингсворта [70], полученные для воды при $Pr = 0,7$, которые аппроксимированы выражением:

$$Pr_T = 1 + 0,855 \operatorname{th} \left[0,2 \left(y^+ - 7,5 \right) \right]. \quad (1.26)$$

Для сравнения даются также данные экспериментов, выполненных Блеквеллом [69] и Хисидой [88] для воздуха при $Pr = 0,7$.

С уменьшением теплопроводности среды (с увеличением числа Прандтля) толщина теплового пограничного слоя снижается. Как следствие возрастают трудности

измерения профиля температуры и пульсационных характеристик потока (t' , u' , v') в соответствии с уравнением (1.9). В [89] рассмотрен альтернативный путь, заключающийся в решении обратной задачи. По хорошо известным апробированным экспериментальным зависимостям $Nu = f(Re, Pr)$ вычисляется значение $Pr_T = f(Pr)^6$. Результаты данного исследования показывают, что значения турбулентного числа Прандтля изменяются практически в диапазоне от 1,0 до 0,1 при $Pr = 1 \div 12500$ для потока в круглой трубе (табл. 1). Было найдено, что значения Pr_T , описываются с погрешностью $\pm 4\%$ следующими соотношениями: $Pr_T = 1,01 - 0,09Pr^{0,36}$ при $1 < Pr < 45$; $Pr_T = 1,01 - 0,25\lg Pr$ при $145 < Pr < 1800$; $Pr_T = 0,99 - 0,44(\lg Pr)^{0,5}$ при $1800 < Pr < 12500$.

В случае жидких металлов с $Pr = 0,02$ наблюдается существенный разброс значений Pr_T , [90], где приведены данные по Pr_T , полученные на основе четырех моделей для потока эвтектики Bi–Pb в круглой трубе диаметром 30 мм при температуре 200 °С, расходе 0,4–6,5 кг/с и $Pe = 240 \div 3920$. Модель Ченга и Така [91] обеспечивает наилучшее соответствие с экспериментальными данными и дает наибольшее значение Pr_T порядка 4,12 среди рассмотренных четырех моделей.

$$Pr_T = \begin{cases} 4,12 & \text{при } Pe \leq 1000 \\ \frac{0,01Pe}{\left[0,18Pe^{0,8} - (7,0 - A)^{1,25}\right]} & \text{при } 1000 < Pe \leq 6000 \end{cases} \quad (1.27)$$

где

$$A = \begin{cases} 5,4 - 9 \cdot 10^{-4} Pe & \text{при } 1000 < Pe \leq 2000 \\ 3,6 & \text{при } 2000 < Pe \leq 6000 \end{cases} \quad (1.28)$$

Результаты по уравнениям (1.27 и 1.28) сравниваются с результатами моделей Pr_T , разработанных для жидких металлов, а именно:

– Аоки [92]

$$Pr_T^{-1} = 0,014Re^{0,45}Pr^{0,2} \left[1 - \exp\left(\frac{1}{0,14Re^{0,45}Pr^{0,2}}\right) \right], \quad (1.29)$$

– Рейнольдса [2]:

$$Pr_T = \left(1 + 100Pe^{-0,5}\right) \left(\frac{1}{1 + 120Re^{-0,5}} - 0,15\right). \quad (1.30)$$

– Джиша [93]

$$Pr_T = 0,9 + \frac{182,4}{Pr \cdot Re^{0,888}}. \quad (1.31)$$

Последняя модель приводит к самым низким значениям Pr_T , за исключением области малого числа Пекле, где Pr_T стремится к 0,9 с увеличением Pe .

⁶ К сожалению, авторы [89] не оценивают и не приводят погрешности этой функции. Исследователи предлагаемых зависимостей $Nu = f(Re, Pr)$ часто не дают корректных оценок погрешности таких зависимостей или указывают на явно завышенную их точность.

Таблица 1. Результаты экспериментов по определению турбулентного числа Прандтля в потоках разных сред в круглой трубе [88]

Среда	Число Pr	Число Pr_T	Среда	Число Pr	Число Pr_T
Вода , 180 °С	1,0	0,92	ЭГЛ, 16 °С	252	0,41
Вода, 100 °С	1,7	0,89	ЭГЛ, 12°С	321	0,38
Вода, 80 °С	2,2	0,88	ЭГЛ, 8 °С	407	0,35
Вода, 60 °С	3,0	0,86	ЭГЛ, 6 °С	458	0,34
Вода, 40 °С	4,3	0,85	ЭГЛ, 4 °С	506	0,33
Вода, 20 °С	7,0	0,83	ЭГЛ, 2 °С	557	0,32
Вода, 5 °С	11,2	0,81	ЭГЛ, 0 °С	617	0,31
СО₂ , 25 °С	15,0	0,78	Масло для двигателя , 60 °С	1050	0,25
Этиленгликоль					
ЭГЛ, 100 °С	22,4	0,74	Глицерин , 50 °С	1630	0,20
ЭГЛ, 80 °С	32,4	0,70	Глицерин, 45 °С	1834	0,19
ЭГЛ, 70 °С	41,9	0,66	Глицерин, 40 °С	2450	0,18
ЭГЛ, 60 °С	51,0	0,64	Глицерин, 38 °С	2736	0,17
ЭГЛ, 50 °С	67,2	0,60	Глицерин, 34 °С	3742	0,16
ЭГЛ, 40 °С	93,0	0,55	Глицерин, 30 °С	5380	0,14
ЭГЛ, 36 °С	106,5	0,53	Глицерин, 28 °С	6430	0,13
ЭГЛ, 32 °С	123,6	0,51	Глицерин, 26 °С	7679	0,122
ЭГЛ, 28 °С	142,8	0,49	Глицерин, 24 °С	9189	0,115
ЭГЛ, 24 °С	169,7	0,48	Глицерин, 22 °С	10755	0,109
ЭГЛ, 20 °С	204,0	0,45	Глицерин, 20 °С	12500	0,100

2. О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ СРЕДЫ В ТРУБЕ

2.1. Распределения (профили) скорости

Для вынужденного ламинарного потока в круглой трубе радиусом r_0 профиль скорости имеет квадратичную форму:

$$\frac{w(r)}{\bar{w}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \tag{2.1}$$

Это выражение справедливо только в тех случаях, когда на профиль скорости не оказывают влияние процессы естественной конвекции.

Для турбулентного потока за истекшие 100 лет (см. статью Кармана [94]), было выполнено много расчетных и экспериментальных исследований, посвященных распределению скорости в круглой трубе. На их основе получен ряд обобщений, и данную задачу при современных требованиях к точности инженерного расчета можно считать решенной [65, 95, 96].

Наиболее широко используется трехслойная модель потока, в которой рассматриваются три области (рис. 1), а именно: 1) область с линейным распределением скорости вблизи стенки, где $U^+ = w/v_*$ – безразмерная скорость потока; 2) буферный слой, где

$$U^+ = 5 \ln y^+ - 3,05; \quad (2.2)$$

3) область с логарифмическим законом распределения скорости в ядре потока

$$U^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5. \quad (2.3)$$

Часто используется уравнение Рейхардта [97], описывающее распределение скорости для всего потока, что является его главным достоинством:

$$U^+ = 2,5 \ln \left[\left(1 + 0,4 y^+ \right) \frac{1,5(1+R)}{1+2R^2} \right] + 7,8 \left(1 + e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-0,33 y^+} \right). \quad (2.4)$$

Однако расчетные данные по этому уравнению не согласуются с результатами, полученными для v_T на основе формул, разработанных автором. Внутренне согласованной является формула, предложенная Левченко и Ушаковым [98]:

$$U^+ = F(y^+) \operatorname{th} \frac{y^+ \left[1 - (0,5 y^+ / r_0^+) \right]}{F(y^+)}, \quad (2.5)$$

где $F(y^+) = 2,5 \ln(1 + y^+) + 5,5$ и $r_0^+ = r_0 v_* / v$ – безразмерный радиус.

Соотношение (2.5) также не дает правильных значений турбулентной вязкости для центральной области потока. Но это не оказывает большого влияния на расчет теплообмена вследствие малого изменения скорости в данной области. Таким образом, вклад центральной области потока в определение средней температуры не является значительным. В принципе для анализа может быть использовано любое другое распределение скорости. Но как показывают оценки, количественные результаты расчета коэффициента теплообмена остаются практически теми же.

Можно выполнить описание профилей скорости и температуры в достаточно широком диапазоне чисел Прандтля путем соответствующего подбора коэффициентов в более сложных формулах. Например, в работе Калбалиева [99] получены соотношения для скорости и температуры (профилей) по «всей толщине внутренней области турбулентного пограничного слоя»:

$$U^+ = 2,5 \frac{\rho_{ст}}{\rho_{ж}} \ln \left(1 + 0,4 \frac{v_{ст}}{v_{ж}} \right) + 7,81 \left[1 - \left(1 + 0,16 y^+ \right) \times \exp(-0,16 y^+) \right], \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T^+ = 2,5 \frac{\rho_{ст}}{\rho_{ж}} \ln \left(1 + 0,4 \frac{v_{ст}}{v_{ж}} y^+ Pr_{ж} \right) + \\ + 7,81 Pr_{ж}^n \left[1 - \left(1 + 0,16 Pr_{ж}^k y^+ \right) \times \exp(-0,16 y^+ + Pr_{ж}^k) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь свойства среды берутся при средней температуре пограничного слоя $\bar{t} = (t_{\text{ст}} + t_{\text{ж}})/2$, где $t_{\text{ст}}$ – температура стенки, $t_{\text{ж}}$ – средняя температура потока, $Pr_{\text{ж}} = Pr(\bar{t})$ и $v_{\text{ст}}/v_{\text{ж}} = 1$, значения $k = 0,5$ и $n = 0,85$. На рис. 21 дано сравнение результатов расчета величины T^+ по уравнению (2.7) и экспериментальных данных для различных жидкостей, полученных при $Pr = (0,02 \div 80)$.

В последующих экспериментах [100] значения скорости и температуры представлялись в универсальных координатах $U^+ = U^+(y^+)$ и $T^+ = T^+(y^+)$, где

$$U^+ = u/v_x^*, \quad T^+ = (T_{\text{ст}} - T)\rho_x c_{px} v_x^* / q_{\text{ст}}; \quad y^+ = y v_x^* \rho_x / \mu_x; \\ v_x^* = \sqrt{\tau_{\text{ст}} / \rho_x}, \quad \tau_{\text{ст}} = \xi(\overline{\rho u})^2 / 8\rho_{\text{ж}}. \quad (2.8)$$

Коэффициент трения находился по формуле $\xi = \xi_0 (T_{\text{ст}}/T_{\text{ж}})^{-0,16}$, в которой значение ξ_0 вычислялось согласно Филоненко из [101] или [102] Расчетные значения скорости U_p^+ определялись по (2.4), а температуры T_p^+ по формуле [103]:

$$T_p^+ = 2,2 \ln \left[\left(1 + 0,4 y^+ \right) \frac{4,2(1+R)}{1+7,4R^2} \right] + 6,1 \left(1 + e^{-0,31 y^+} - 0,31 y^+ e^{-0,18 y^+} \right). \quad (2.9)$$

При выборе температуры в качестве определяющей величины наблюдается достаточно удовлетворительное описание экспериментальных профилей уравнением (2.9). Однако с увеличением безразмерной координаты расхождение между экспериментальными и расчетными данными увеличивается, достигая на оси потока 20 %.

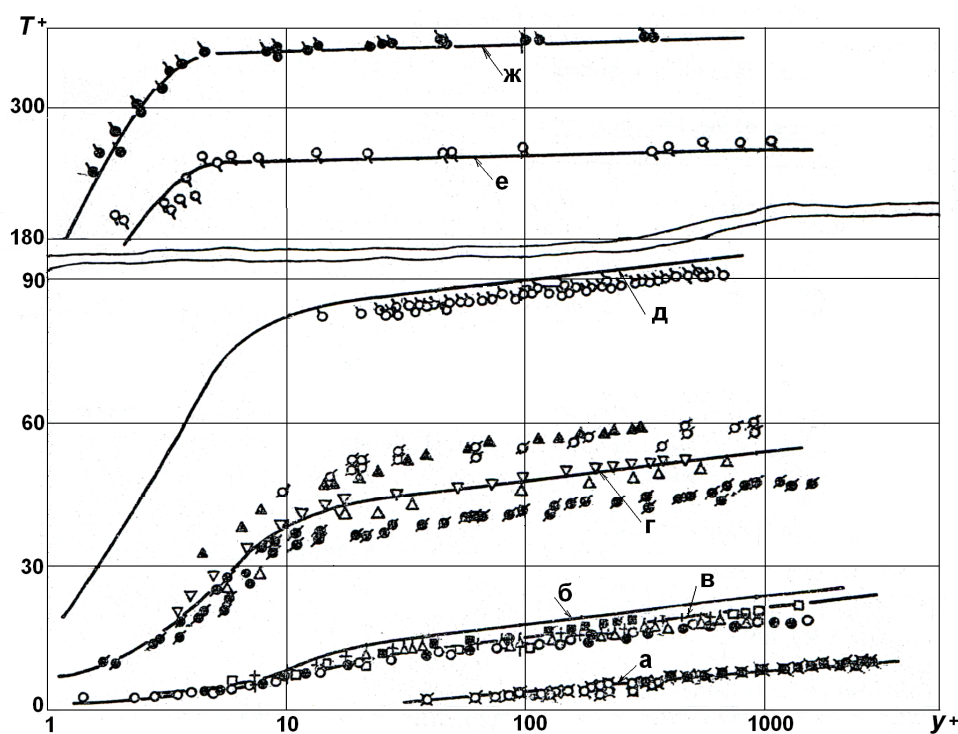


Рис. 21. Профили безразмерной температуры в потоке различных сред [72]:

а – жидкие металлы при $Pr \sim 0,026$, **б** – воздух при $Pr \sim 0,7$, **в** – вода при $Pr = 1$, **г** – вода при $Pr = 5,7$, **д** – этиленгликоль при $Pr = 14,3$, **е** – трансформаторное масло при $Pr = 54$, **ж** – трансформаторное масло при $Pr = 81$. — — — — — расчетные данные по уравнению (2.7) при $k = 0,5$ и $n = 0,85$

На рис. 22 представлена обработка профилей скорости и температуры с использованием локальных температур воздуха [104].

Аналогичная ситуация складывается при использовании упрощенных профилей скорости степенного вида [104, 105]. Обширный обзор одиннадцати моделей скорости вблизи стенки в пограничном слое, выполненный в [106], помогает оценить сходство и различие между этими моделями. Кроме того, подтверждается общепринятая форма записи закона: $U^+ = (1/k) \ln y^+ + C$.

Расчеты распределения скорости на основе вышеуказанных и других соотношений достаточно хорошо согласуются между собой и с экспериментальными данными. Однако значения коэффициентов переноса количества движения (ν_T), не отражаясь на профиле скорости, приводят к значительным различиям при инженерных расчетах процессов теплообмена с использованием таких величин как ν_T или турбулентное число Прандтля.

В [107] на основании экспериментальных измерений [108, 109] был предложен «неуниверсальный», зависящий от числа Рейнольдса степенной закон в виде соотношения:

$$U^+ = \left(\frac{\ln Re}{\sqrt{3}} + \frac{5}{2} \right) (y^+)^{3/2 \ln Re}. \tag{2.10}$$

Данный закон вызвал критику, так как его разработка основывалась на чисто теоретических предположениях [110]. При этом также отмечалось различие между областями применения логарифмического и степенных законов. Последний закон описывает профиль скорости только в верхней декаде логарифмической области, а также в некоторой области выше.

По мнению авторов [111] этот закон справедлив от верхней границы вязкого подслоя, где $y^+ \sim 30$, до окрестности оси трубы, где $y/R > 0,95$. Пока использование уравнения (2.10) для инженерных расчетов не апробировано. Тем более не ясна сама возможность применения этого уравнения при расчетах ν_T , а, следовательно, и определения значения Pr_T .

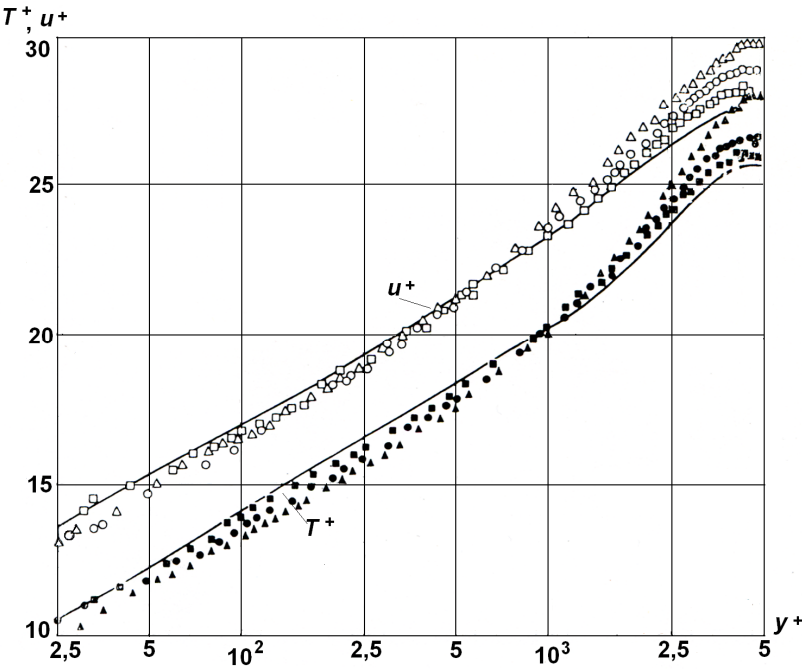


Рис. 22. Распределение по сечению трубы профилей безразмерной скорости и температуры при выборе локальной температуры воздуха в качестве определяющей величины ($Re \approx 1,92 \cdot 10^5$)

2.2. Распределение температуры и законы теплообмена

2.2.1. Распределения (профили) температуры

Одной из первых попыток рассчитать теплообмен на основе данных по гидравлике течения жидкости была гипотеза подобия, высказанная Рейнольдсом в 1874 г. Она основывалась на предположении о подобии полей скорости и температуры при течении жидкости в канале. Однако дальнейшие исследования показали, что такое подобие строго не соблюдается, поэтому возникла необходимость детальных измерения полей скорости и температуры [112].

Анализ закономерностей распределения температуры проводится, исходя из разделения турбулентного потока на пограничный слой и турбулентное ядро. Обычно пограничный слой оказывает основное сопротивление переносу тепла. В самом пограничном слое выделяют область теплового подслоя, в котором перенос тепла за счет молекулярных процессов преобладает над турбулентным переносом. Далее следует переходная зона, где, несмотря на существенные турбулентные пульсации, необходимо учитывать и влияние молекулярного переноса тепла. За этой зоной следует область с определяющей ролью механизма турбулентного переноса [4].

Далее при определении профилей температуры в координатах $T^+ = f(y^+ Pr)$ рассматривается турбулентное течение жидкостей и газов в круглой трубе при постоянной скорости потока на внутренней поверхности трубы. В области теплового подслоя распределение температуры является линейным, так как отражает именно это граничное условие. В области турбулентного переноса, то есть при $y^+ Pr \geq 30$, наблюдается логарифмическое распределение температуры [85]. Результаты всех исследований подтверждают наличие в потоке зон с линейным и логарифмическим распределением температуры:

$$T^+ = y^+ Pr; \quad T^+ = A \ln(y^+ Pr) + B. \quad (2.11)$$

Коэффициент A слабо зависит от числа Прандтля и с достаточной точностью может быть принят постоянным. Коэффициент B является функцией числа Pr . Хорошее соответствие профилей температуры (2.11) с экспериментальными данными [47, 113], полученными в диапазоне $0,7 \leq Pr \leq 64$ для потока в трубе, наблюдается при $A = 2,3$ и B , равным:

$$B = 24,5 Pr^{0,55} - 8,2 \ln Pr - 19. \quad (2.12)$$

При этом форма температурных профилей в потоке теплоносителя с разными числами Прандтля практически одинакова.

С начала 70-х годов прошлого века предпринимались неоднократные попытки найти общую зависимость (закон) распределения температур для потоков сред в трубах с различными числами Прандтля. Так Томас [114] предложил достаточно простую модель на основе теории выбросов (прерывистого движения вихрей) в пристенной области. В результате была получена формула, описывающая профиль

температуры $T=f(y^+)$, которая показала хорошую применимость при $y^+=4\div 400$ для ртути ($Pr\sim 0,02$), воздуха ($Pr\sim 0,7$) и воды ($Pr\approx 5,9$):

$$T^+ = \sqrt{\frac{Pr}{\xi/8}} \left[1 - \exp \left(-y^+ \sqrt{Pr \frac{\xi}{8}} \right) \right]. \tag{2.13}$$

Сравнение между расчетными и экспериментальными данными температуры при-
ведено на рис. 23 (а, б).

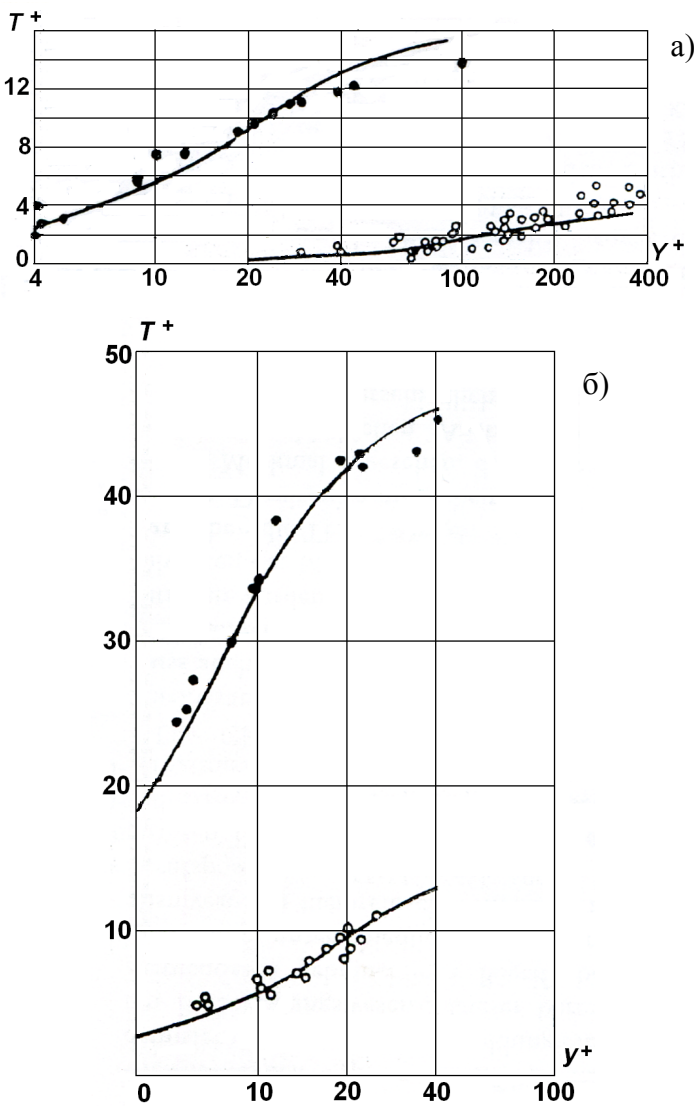


Рис. 23. Сравнение между расчетными температурными профилями по уравнению (2.13) и экспериментальными профилями:
а) ———— – расчет, ● – воздух, ○ – ртуть; **б)** ———— – расчет, ● – вода при $Pr = 5,9$,
○ – воздух при $Pr = 0,72$

Более фундаментальное исследование в те годы выполнили Кадер и Яглом [85]. Они разработали соотношения для коэффициента теплоотдачи (или числа Нуссельта), включавшие в качестве параметров безразмерные коэффициенты универсальных логарифмических формул для профилей скорости и температуры. Один из коэффициентов являлся «универсальной функцией числа Прандтля». Был сделан вывод, что «общие законы тепло- и массопереноса в трубе и пограничном слое на пло-

ской пластине удовлетворительно согласуются с многочисленными экспериментами в пределах $Pr=(6\cdot 10^{-3}\div 10^6)$ и на протяжении двух порядков изменения числа $Re=10^4\div 10^6$.

На рис. 24, 25, 26 представлены зависимости числа Нуссельта от чисел Рейнольдса, Прандтля и Пекле при течении различных сред в трубе, определенные на основе экспериментальных данных, и их сравнение с расчетами [85]. Расчет числа Nu для воздуха (рис. 26) выполнялся по эмпирической формуле:

$$Nu = 0,018Re^{0,8}. \quad (2.14)$$

Данные на рис. 24 для воздуха при $Pr \sim 0,7$ и $Re\cdot 10^{-3} = 5\div 970$ находились из соотношения:

$$Nu = C_h Re Pr = \frac{Re \sqrt{C_f}}{4,3 \ln \left(Re \sqrt{C_f} \right) - 2,0}. \quad (2.15)$$

Для других сред при $Pr = 1\div 10^5$ и $Re\cdot 10^{-3} = 6\div 500$ по формуле:

$$Nu = \frac{Re Pr \sqrt{C_f/2}}{2,12 \ln \left(Re \sqrt{C_f} \right) + 12,5 Pr^{2/3} + 2,12 \ln Pr - 10,1}. \quad (2.16)$$

Для жидких металлов при $Pr \approx 0,006\div 0,026$, $Re\cdot 10^{-3} = 0,6\div 950$ и $Pe = 50\div 18000$ (рис. 28) значение числа Nu рассчитывалось по формуле:

$$Nu = \frac{Re Pr \left(\sqrt{C_f/2} \right) \Delta}{2,12 \ln \left(Re \sqrt{C_f} \right) + 12,5 Pr^{2/3} + 2,12 \ln Pr + 3,1}. \quad (2.17)$$

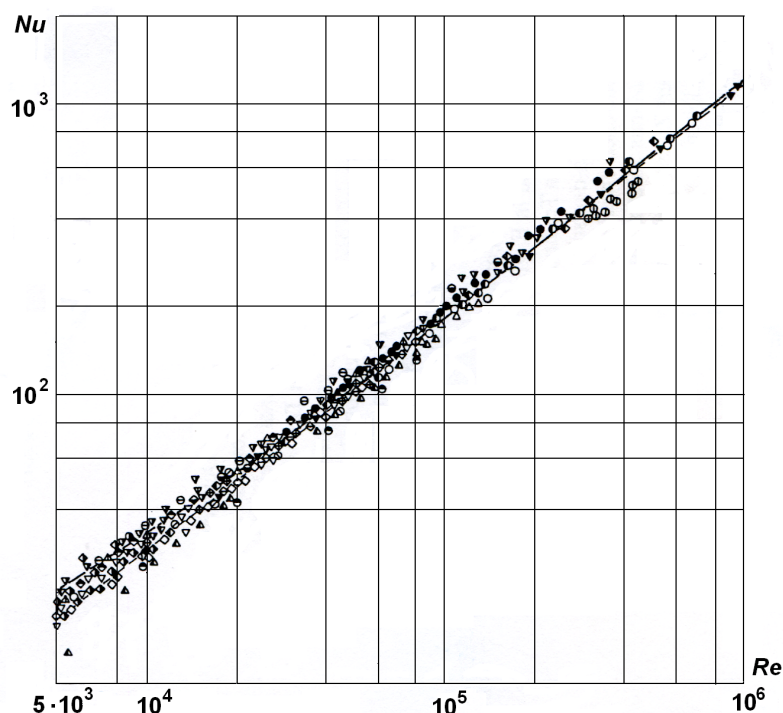


Рис. 24. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса по экспериментальным данным [85] для потока воздуха в трубе при $Re = (5\div 970)\cdot 10^3$; - - - - - расчетные данные по уравнению (2.15)

Здесь C_h и C_f – коэффициенты, рассчитываемые по средней скорости потока, $1/\Delta = (T_{ст} - T_{ж}) / (T_{ст} - T_{max})$ – сложная функция числа Pe , C_f и др.

Исследования [84, 85] – это хороший пример поиска общих закономерностей теплообмена для теплоносителей с разными числами Прандтля. Однако сравнение экспериментальных и расчетных данных (рис 24, 25, 26) в двойных логарифмических координатах может привести к неверному выводу о приемлемом решении вышеуказанной проблемы. Наблюдается якобы хорошее соответствие между соотношениями (2.15—2.18) и результатами экспериментальных работ. Но при использовании других координат $Nu=f(Re)$ указанное согласие не имеет места. Подобные

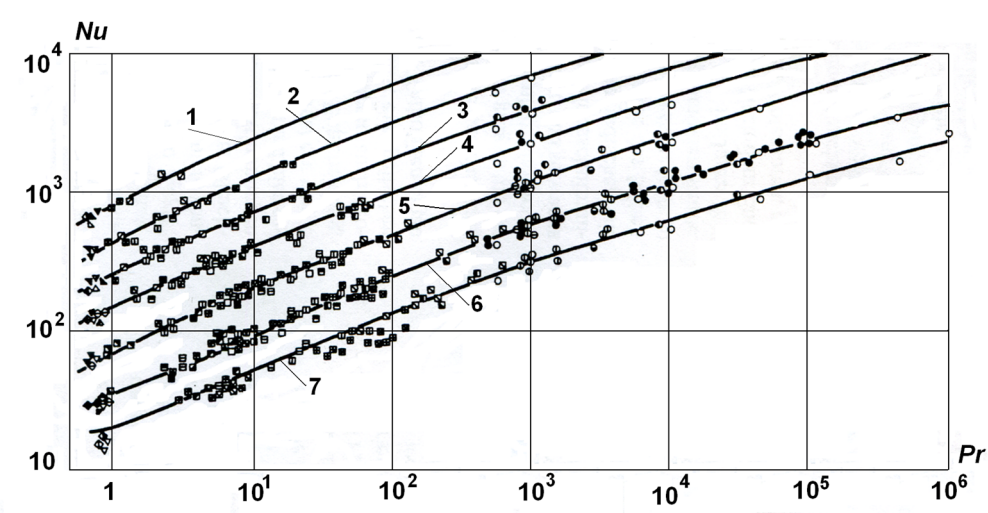


Рис. 25. Зависимость числа Нуссельта от числа Прандтля по экспериментальным данным [85] для потоков различных сред (вода, масло, этиленгликоль, гидроокись натрия, глицерин и др.) в трубе при $Pr = 3 \div 701$; — — — расчетные данные по уравнению (2.16) для воздуха и (2.17) для других сред. 1 – $Re=5 \cdot 10^5$, 2 – $Re=2 \cdot 10^5$, 3 – $Re=1 \cdot 10^6$, 4 – $Re=5 \cdot 10^4$, 5 – $Re=2,5 \cdot 10^3$, 6 – $Re=1 \cdot 10^4$, 7 – $Re=5 \cdot 10^3$

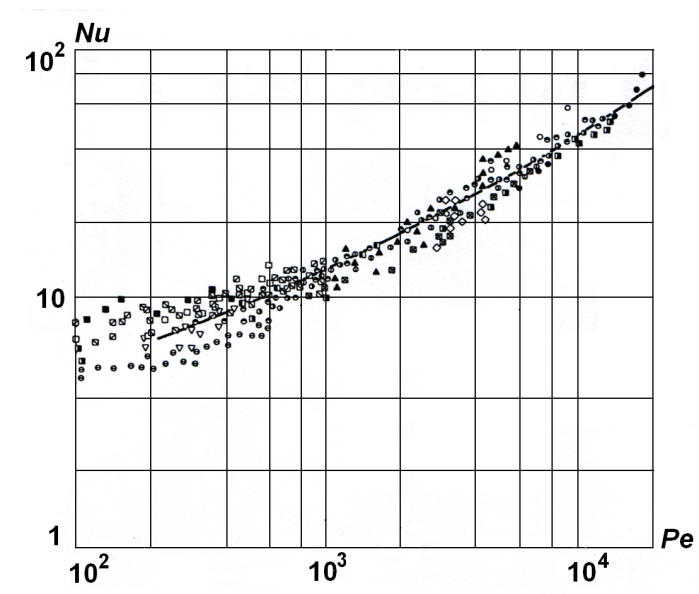


Рис. 26. Зависимость числа Нуссельта от числа Пекле по экспериментальным данным [85] для потока жидкого металла (Hg, Na, K, Na-K) в трубе при $Pr \approx 0,006 \div 0,026$, $Re=(0,6 \div 950) \cdot 10^3$ и $Pe=50 \div 18000$; — — — расчетные данные по уравнению (2.18)

исследования интересны с общенаучной точки зрения, но малопродуктивны для инженерных расчетов вследствие большого разброса данных и отсутствия оценки погрешностей предложенных соотношений.

Отметим **особенности методик измерений профиля температуры**, которые могут оказать влияние на конечные результаты:

1. Экспериментальные измерения профиля температуры в потоках обычных средах, например, воздуха, воды ($Pr \sim 1$) являются трудными, так как основная область измерений находится достаточно близко к поверхности теплообмена в тонком слое. На рис. 27 как пример дано распределение формы профиля температуры по радиусу трубы при разных числах Прандтля. Еще большие сложности по указанной причине возникают при проведении экспериментов в средах с $Pr \gg 1$, таких как технические масла, вязкие жидкости с низкой теплопроводностью. Размеры датчика температуры могут быть сравнимы с размерами пограничного слоя.

Из рис. 27 видно, что толщина пристенного пограничного слоя (то есть слоя с наибольшим изменением температуры) примерно обратно пропорциональна числу Прандтля. Поэтому в потоках жидких металлов ($Pr = 0,005 \div 0,02$) это обстоятельство позволяет измерять поле температур наиболее надежно с помощью термопар. Измерения поля температур в средах с высокими числами Прандтля (от $50 \div 100$ и более) представляются менее надежными.

2. При вычислении средней температуры потока $\bar{t}_ж$ по измеренным профилям (температура как функции безразмерного расстояния $R = r/r_0$, где r_0 – радиус трубы) производится интегрирование:

$$\bar{t}_ж = 2 \int_0^1 t(R) u(R) R dR. \quad (2.18)$$

В круглой трубе центральная и пристенная области потока ($R \approx 0,95 - 1,0$), где $u = w/\bar{w} \ll 1$, не дают большого вклада в значение $\bar{t}_ж$. Однако их вклад должен быть оценен в зависимости от чисел Рейнольдса и Прандтля, например, как это выполнено в [115]. На рис. 28 приведено распределение функции $f = u^+ T^+ R^+$ по радиусу трубы при $Re = 10^4$ и $Pr = (1; 5)$. Здесь $u^+ = w/v_*$ – безразмерная скорость, где $v_* = \sqrt{\tau/\rho} = \bar{w} \sqrt{\xi/8}$ – скорость трения; $T^+ = \frac{t_{ст} - t}{T_*}$ – безразмерная температура, где $T_* = \frac{q}{\rho C_p v_*}$ – температура трения.

3. Расчет теплообмена при турбулентном течении среды в круглой трубе обычно проводят при заданном тепловом потоке на поверхности стенка-жидкость. На практике в экспериментах граничное условие для теплового потока q определяется на наружной поверхности трубы. Но температура стенки $t_{ст}$ и коэффициент

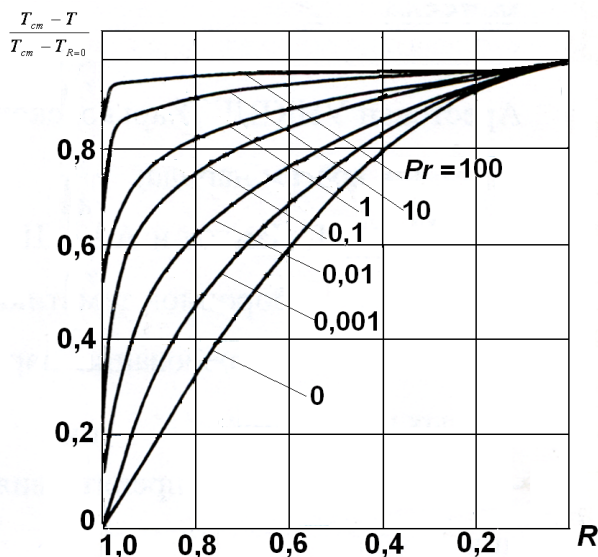


Рис. 27. Распределение плотности теплового потока по радиусу трубы при разных числах Прандтля [68]

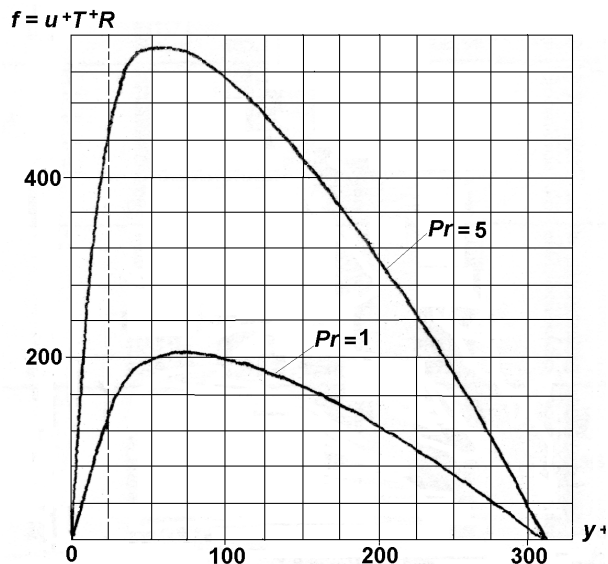


Рис. 28. Распределение функции $f = u^+ T^+ R$ по радиусу трубы для $Re = 10^4$ [115]

теплоотдачи α на внутренней поверхности заранее не известны. Описание различных методов расчета сопряженной задачи, которые позволяют определить значения $t_{ст}$ и α содержатся в [116–120].

Существует три способа расчета конвективного теплообмена при турбулентном течении в трубе на основании данных по экспериментальным полям температуры. Для первого способа — это результаты измерений температуры поверхности, для второго и третьего способов — данные измерений профиля температуры в потоке [121]. При первом полуэмпирическом способе используется интеграл Лайона следующего вида:

$$\frac{1}{Nu} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R u R dr \right)^2}{R \left[1 + \frac{a_T}{a} (Re, Pr, R) \right]} dR. \quad (2.19)$$

Значение a_T/a получается путем дифференцирования полей температуры и установления зависимости $a_T/a = f(Re, Pr, R)$. Интеграл (2.19) можно также вычислить, например, из выражения $a_T/a = (a_T/v_T)(v_T/v)(v/a) = (Pr/Pr_T)(v_T/v)$ и аппроксимационной зависимости $v_T/v = f(Re, R...)$ и предполагая, что $Pr_T = 1$. Результаты выполненных расчетов аппроксимируются зависимостью $Nu = f(Re, Pr)$ [122].

Следует учитывать, что при отсутствии контроля за условиями на поверхности экспериментального участка на ней образуются окисные пленки, происходят процессы коррозии и образования отложений. Как следствие, во время измерений фактически определяется некоторый эффективный коэффициент теплообмена, связанный с истинным коэффициентом соотношением $1/\alpha_{эф} = 1/\alpha + R$. Здесь R — термиче-

ское сопротивление неконтролируемых «отложений». Если принять значение $\alpha \approx 10^4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ то, ясно, что при $R \approx 10^{-4} (\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ величина $\alpha_{\text{эф}}$ будет занижена вдвое. Заметим, что значение $R \approx 10^{-4} (\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ достигается при толщине всего 0,1 мм, если теплопроводность имеет порядок 1 Вт/(м·К). Это показывает насколько сложно контролировать данный эффект при высоких коэффициентах теплообмена.

Во втором способе на основе полученных зависимостей для турбулентного обмена тепла выполняется обобщение полей температуры и далее расчет числа Nu по интегралу Лайона. В [122] исходя из анализа экспериментальных данных [123], предложена обобщающая формула для теплоносителей с $Pr = 0,02 \div 10$:

$$\frac{a_T}{a} = 2,04 \cdot 10^{-3} Re \left(1 + R^2 - 2R^3 \right) - \left(0,239 + 0,8356 \cdot 10^{-7} Re \right) y^+ \exp \left(-0,083 y^+ \right). \quad (2.20)$$

В [124] на основании теории однородной диффузии и анализа статистических характеристик турбулентных потоков дается соотношение:

$$\frac{a_T}{a} = 0,16 Re \left[1 - \exp \left(-0,62 \cdot 10^{-4} Re Pr^{1/3} \right) \right] \cdot \frac{u^6}{(u_{\max})^4} \left(1 - \frac{1}{u_{\max}} \right)^2 \exp \left[1,54(1 - R) \right]. \quad (2.21)$$

Аналогичный метод использован в работах [122, 125, 126, 127]. По мнению авторов [126] для $Pr = 0 \div 100$ и $Re = (10^4 \div 3 \cdot 10^5)$ применима аппроксимационная зависимость:

$$Nu = \left(7,7 + \frac{3,6}{\lg Re} \right) + 0,0096 Re^{0,87} Pr^n, \quad (2.22)$$

где $n = 0,4 + \left[0,5 / (2Pr + 1) \right]$.

Третий способ исходит из определения числа Нуссельта как $Nu = \alpha d / \lambda = \left[q_{\text{ст}} / (t_{\text{ст}} - \bar{t}) \right]$. Вводя безразмерную температуру T^+ и температуру трения T^* (см. пояснения после (2.18)), выражение для Nu можно записать в виде:

$$Nu = Pe \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot \frac{1}{\bar{T}^+} = \frac{Pe_*}{\bar{T}^+}. \quad (2.23)$$

С учетом, что среднее значение безразмерной температуры потока равно по определению:

$$\bar{T}^+ = 2 \int_0^1 T^+ \frac{w}{\bar{w}} R dR = \frac{8}{Pe^2 \sqrt{\xi/8}} \int_0^{R_0 v_* / a} T^+ u^+ R dR, \quad (2.24)$$

и подставляя (2.24) в (2.23), получаем:

$$Nu = \frac{\xi Pe^3}{64} \left(\int_0^{R_0 v_* / a} T^+ u^+ R dR \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

Эта же зависимость с использованием безразмерного расстояния от стенки имеет вид:

$$Nu = \frac{\xi Pe^3}{64} \left[\int_0^y T^+ u^+ (yPr - y^+ Pr) d(y^+ Pr) \right]^{-1}, \quad (2.26)$$

где $y^+ = \frac{R_0 v_*}{\nu} = Re \sqrt{\frac{\xi}{8}} = \frac{Pe_*}{2}$.

Выражение (2.26) имеет самый общий вид и включает лишь эмпирические коэффициенты, которые входят в формулы для ξ , T^+ , u^+ . Необходимо подчеркнуть, что для круглой трубы приграничный слой и центр потока не оказывают большого влияния на величину $\bar{T}^+$. Поэтому при расчете теплообмена можно ограничиться учетом лишь логарифмических областей распределения скорости и температуры, а ошибка должна быть оценена.

Из рассмотренных трех способов расчета теплообмена при турбулентном течении в трубе достоинством первого способа является относительная простота эксперимента, второго — возможность получения обобщающей зависимости $Nu = f(Re, Pr, Pr_T)$, третьего — возможность получения наиболее точной зависимости числа Nu для потока заданной среды. Но для каждого из трех способов характерны свои недостатки. При первом способе невозможно учитывать влияние вероятного присутствия отложений на поверхности теплообмена. Для второго способа имеют место заметные погрешности, возникающие при определении значений ν_T , a_T , Pr_T в турбулентной области. Третий способ отличается трудоемким процессом измерения полей температуры по сложной или новой методике в потоках разных сред.

2.2.2. Распределение температуры в потоках жидких металлов ($Pr \ll 1$)

Жидкие металлы характеризуются более высокой теплопроводностью по сравнению с обычными жидкостями и, как следствие, низкими числами Прандтля. Поэтому в потоке жидкого металла даже при развитом турбулентном течении молекулярный (электронный) перенос тепла играет важную роль не только в пристенном слое, но и в турбулентном ядре потока. Толщина теплового пограничного слоя для жидких металлов оказывается значительно большей, чем вязкостного подслоя около стенки. В результате экспериментальные измерения полей или распределения температуры в жидких металлах отличаются большей достоверностью и точностью по сравнению со средами, обладающими $Pr \gg 1$.

Жидкие металлы обладают низкой удельной теплоемкостью и, соответственно, не высокими значениями кинематической вязкости [128]. Распределение или профили температуры в жидких металлах заметно отличаются от профилей скорости. Для сравнительного анализа процессов теплообмена в жидких металлах в сопоставимом диапазоне чисел Pr и Re применяют число Пекле, равное $Pe = Pr \cdot Re$.

Теплоотдача в жидких металлах зависит не только от формы канала и режима течения, но и степени чистоты металла. На границе раздела стенка–жидкий металл

может находиться слой, вызывающий дополнительное термическое или контактное сопротивление (R_k). Причинами образования такого слоя являются следующие факторы: 1) наличие на поверхности теплообмена пленки оксидов или интерметаллидов, 2) образование неподвижного слоя примесей вследствие их осаждения из потока металлов, 3) возникновение подвижного слоя примесей из жидкого металла при его нагреве.

Теплоотдача к различным жидким металлам в круглых трубах изучалась наиболее подробно. В табл.2 приведены обобщенные данные по характеристикам экспериментальных исследований полей температуры в жидких металлах, выполненных за период 1951–1973 гг. Здесь нержавеющей сталь — материал марки 1Х18Н9Т. Эвтектический сплав NaK содержит 22 % натрия и 78 % калия. В исследовании Амплеева [139] было измерено 244 профиля температуры для 36 режимов при разных расстояниях от входа.

Экспериментальные данные по измерению распределения температуры в турбулентных потоках натрия, ртути и сплава свинца с висмутом, представленные в безразмерных координатах $T^+ = f(y^{++})$, не проявляли расслоения в зависимости от числа Прандтля, хотя его значение изменялось в пределах 0,006–0,027. Здесь безразмерные переменные величины выражаются как [142, 143]:

$$u^+ = \frac{u}{u_*^*}; \quad T^+ = \frac{T}{T_*^*}; \quad y^+ = \frac{yu_*^*}{\nu}; \quad y^{++} = \frac{yu_*^*}{a}. \quad (2.27)$$

При этом наблюдается универсальный профиль распределения температуры, который имеет логарифмический характер и описывается следующими уравнениями:

$$T^+ = y^{++} \quad \text{при } 0 < y^{++} < 1; \quad (2.28)$$

$$T^+ = [1,87 \ln(y^{++} + 1) + 0,65 y^{++} - 0,36] \quad \text{при } 1 < y^{++} < 11,7; \quad (2.29)$$

$$T^+ = 2,5 \ln y^{++} - 1 \quad \text{при } y^{++} > 11,7. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.30) подобрано так, чтобы обеспечить на границах зон $y^{++}=1$ и $y^{++}=11,7$ сшивку значений величины T^+ и производных $T^+ = \partial T^+ / \partial y^{++}$. Соотношения (2.28, 2.29 и 2.30) проверены для круглых труб, каналов кольцевой, прямоугольной и квадратной форм, а также для пучков стержней. Можно сказать, что они носят универсальный характер и справедливы для каналов любой формы.

Используя найденное распределение температуры, определена следующая зависимость числа Нуссельта от числа Пекле, позволяющая аппроксимировать экспериментальные данные с точностью $\pm 8 \%$ при $Pe = 100 \div 20000$:

$$Nu = 5 + 0,025 Pe^{0,8}, \quad (2.31)$$

где $Pe = ud/\lambda$. Но уравнение (2.31) применимо только для турбулентного режима течения и не дает предельного перехода к ламинарной области.

Таблица 2. Данные исследований полей температуры в жидких металлах, выполненных в 1951–1974 гг.

Автор, год, источник	Жидкий металл	Кол-во температур. профилей	Число Pr	Число $Re \cdot 10^{-3}$	Направление потока	Диаметр трубы, мм	Материал стенки
1	2	3	4	5	6	7	8
Исаков, 1951, [43]	Hg	12	0,025	37,6÷373	↑	38,1	Нерж. сталь
Браун, 1957, [44]	Hg	5	0,025	244÷731	↑	31,7	Никель
Кириллов, 1959, [129]	NaK	6	0,015÷0,021	2÷129	↑	22,40 36,7	Медь Никель
Кириллов, 1959, [130]	NaK	2	0,025	2÷129	↑	36,7	Никель
Пирогов, 1960, [131]	Na	1	0,0071	2,4÷6,4	→	28	Медь
Субботин, 1961 [132]	Na PbBi	2 2	0,006 ~ 0,02	16,2; 24,7 24,2; 204	↑ ↑	31,1 29,3	Нерж. сталь
Субботин, 1962 [133]	Na	150 (18)	0,0057÷0,0075	5,85÷178	↑	35,3 36,5 39,4 39,9	1X18Н9Т Никель Ст. 10 Медь
Субботин, 1962, [134]	Hg	2	0,02	10÷200	↑	29,3	Нерж. сталь
Кокорев, 1963, [135]	Hg	9	0,025÷0,027	110÷165	→	54	Нерж. сталь
Субботин, 1963, [123]	Hg	28	0,023÷0,027	22,1÷427	↑	29,3	Нерж. сталь
Боришанский, 1964, [136]	Hg	4	0,022	45÷260	↑ →	40	Нерж. сталь
Боришанский, 1964, [137]	Na	6	0,006÷0,007	20÷60	↑	40	Медь
Шрок, 1964,[138]	NaK	23	~ 0,02	2,1÷76,8	→ ↑		
Амплеев, 1967, [139]	NaK	244	~ 0,02	0,4÷96	↑	30	Медь
Таккен, 1967, [140]	Na	11	0,005	61,4÷160,4	→	кольц. зазор	Нерж. сталь
Бур, 1968б [79]	NaK	10	0,019÷0,029	31,4÷153	↑	49,7	Нерж. сталь т-ра ст. const
Слейчер, 1973б [81]	NaK	6	0,02÷0,0245	26÷302	↑	28,6	Медь, бронза (три слоя)
Бур, 1974б [141]	Hg	14	0,023÷0,026	18,2÷65,4	↑	49,7	Нерж. сталь т-ра ст. const

На рис. 29 представлена зависимость $Nu = f(Pe^*)$, где Pe^* – безразмерное число Пекле, равное:

$$Pe^* = (v_* d) / a = Pe \sqrt{\xi / 8}, \tag{2.32}$$

где значение ξ находится по формуле Филоненко $\xi = (1,82 \lg Re - 1,64)^{-2}$. После обработки опытных данных методом наименьших квадратов получена следующая формула для расчета числа Nu при $Pe^* \leq 1000$:

$$Nu = 4,36 + 0,343 (Pe^*)^{0,8}. \tag{2.33}$$

Эта формула, имеющая погрешность $\pm 2 \%$, обеспечивает переход к ламинарному режиму течения, при котором $Nu = 4,36$. Результаты расчетов по (2.31 и 2.33) при различных числах Прандтля даны в табл. 3. Наблюдается хорошее соответствие между значениями числа Nu по экспериментальным ($Nu = \alpha d / \lambda$) и расчетными данными из уравнения (2.34).

Дальнейшие исследования теплообмена в жидких металлах показали, что данная задача является сопряженной, то есть поле температуры в потоке, а, следовательно, и коэффициент теплообмена зависят от теплофизических свойств поверхности.

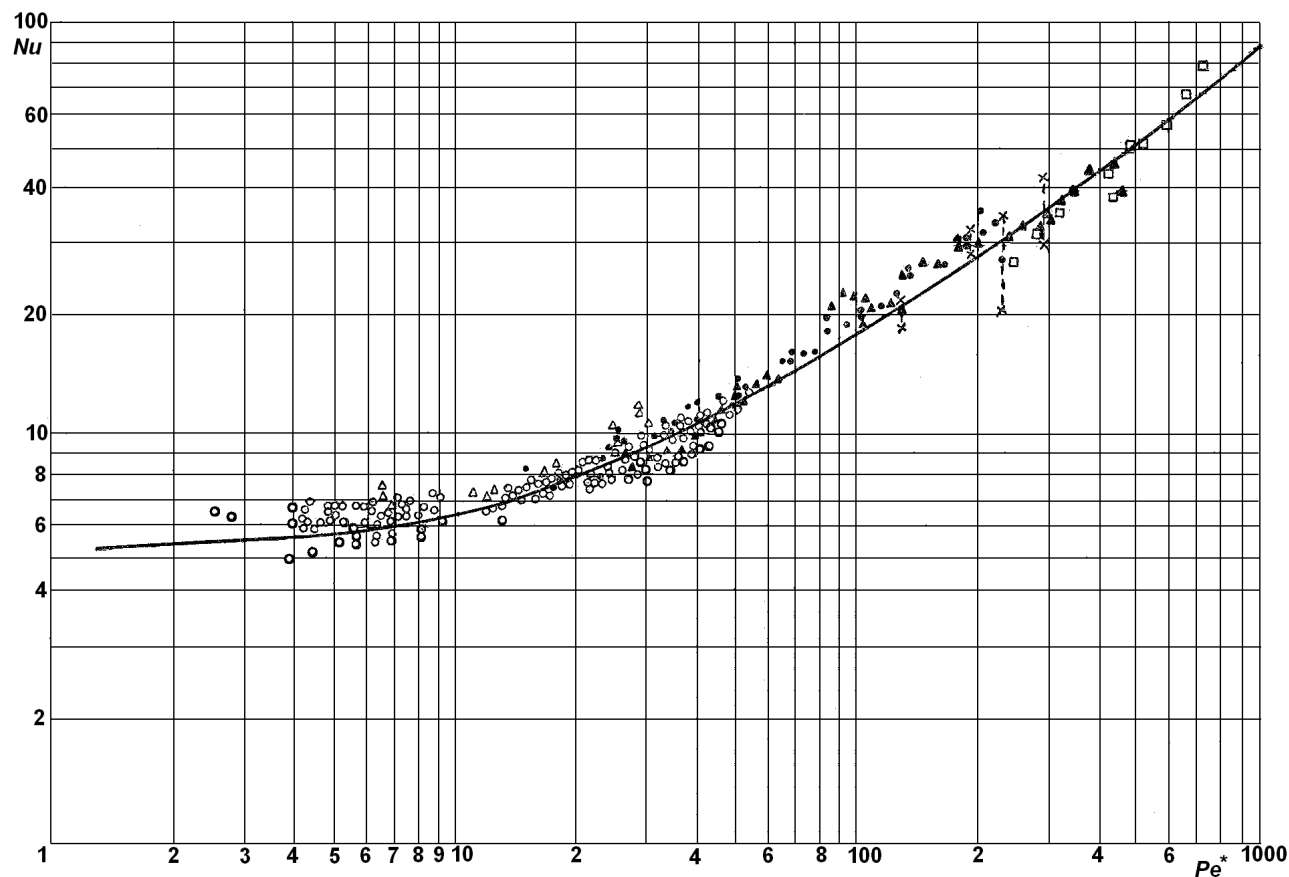


Рис. 29. Зависимость Nu от Pe^* по данным измерений температуры в турбулентном потоке жидкого металла: $\bigcirc$ – натрий [133]; Δ – Na-K сплав [130]; $\bullet$ – Pb-Bi сплав [144]; $\blacktriangle$ – ртуть [144]; $\square$ – ртуть [43]; — — — кривая, рассчитанная по формуле (2.34); $\times$ — ртуть [44]; $\begin{smallmatrix} X \\ \vdots \\ X' \end{smallmatrix}$

Таблица 3. Расчетные значения чисел Nu и Pe^* по соотношениям (2.33 и 2.34) для различных чисел Прандтля [143]

Число Re	$Pr = 0,001$		$Pr = 0,005$		$Pr = 0,010$		$Pr = 0,025$	
	Nu	Pe^*	Nu	Pe^*	Nu	Pe^*	Nu	Pe^*
10^4	5,41	0,630	5,35	3,16	5,77	6,30	7,23	15,76
$3,16 \cdot 10^4$	5,49	1,628	6,14	8,64	7,56	17,26	11,12	43,20
10^5	5,84	4,720	8,79	23,60	12,09	47,20	19,8	118
$3,16 \cdot 10^5$	7,19	13,35	13,64	66,6	21,65	123,4	39,3	334
10^6	10,89	38,2	26,9	191	44,5	382	87,6	934

Таблица 4. Теплофизические свойства натрия и материалов стенки при 250 °С [147]

Характеристики	Натрий	Материал рабочего участка			
		Медь	Ни- кель	Сталь 10	Сталь 1X18Н9
Параметры участка: внутренний диаметр, мм толщина стенки, мм	—	39,9 5	36,5 4	39,4 2,8	35,3 0,35
Плотность, кг/м ³	891	8800	8750	7800	7900
Удельная теплоемкость, кДж/(кг · К)	1,302	0,410	0,460	0,502	0,490
Теплопроводность, Вт/(м·К)	78,7	374	71	51	18,4
Температуропроводность · 10 ⁶ , м ² /с	67,8	104	17,6	13,0	4,75
Теплопроницаемость $b \cdot 10^{-3}$, (Вт·с ^{1/2})/ (м ² ·К)	9,56	36,7	16,95	14,17	8,44
Отношение $\Lambda (b_{ст}/b_{Na})$	1,00	3,84	1,77	1,48	0,88

По сравнению с обычными жидкостями влияние стенки проявляется в потоках жидких металлов намного сильнее, что может заметно сказываться на турбулентном переносе и теплоотдаче в них [63]. Подробно эта проблема рассмотрена в обзоре [145] и ряде статей.

Выделяют два принципиально различных явления, которые оказывают заметный эффект на данный фактор. Первое из них обусловлено перетечками тепла по стенке при наличии градиента температуры вдоль потока или в направлении, поперечном вектору скорости. Это могут быть условия начального теплового участка в каналах, неравномерности температуры по длине или периметру теплоотдающей поверхности.

Другое явление — локальная (в малом) нестационарность полей скорости и температуры вследствие периодической турбулентной структуры потока, обтекающего стенку, в турбулентном слое. Данное явление отчасти аналогично известному влиянию материала поверхности на теплоотдачу при кипении и конденсации, хотя и имеет совершенно другую природу.

В [133, 146, 147] приводятся результаты изучения теплообмена в потоке натрия в вертикальной трубе. Эксперименты были проведены на четырех рабочих участках из разных материалов (табл. 4). Наряду с параметрами рабочего участка и теплофи-

зическими свойствами для Na и материала стенки приводятся значения теплопроводности, равной комплексу $b = \sqrt{\lambda C_p \rho}$, и отношения $\Lambda = b_{\text{ст}}/b_{\text{Na}}$. Диапазон числа Рейнольдса был равен $6 \cdot 10^3 \div 1,18 \cdot 10^5$. Распределение температуры стенки измерялось посредством термопар, заделанных в нее, а распределение температуры в потоке натрия по радиусу трубы — с помощью передвижной термопары.

Анализ полученных экспериментальных данных позволяет сделать вывод о влиянии материала стенки на характеристики теплоотдачи в жидком металле. Зависимость $Nu = f(Re)$ для труб из стали 1ХН9Т и меди показывает очевидное расслоение экспериментальных данных (рис. 30). При этом теплоотдача для стальной трубы выше в среднем на 25 % по сравнению с медной трубой. Подобное расслоение точек наблюдается и для температурных полей, измеренных в стальной и медной трубах (рис. 31) [146].

Статистический анализ [147] подтверждает указанную выше закономерность с 95 % уровнем достоверности. Разница в числах Nu для разных материалов стенки, включая сталь 1ХН9Т, сталь 10, никель и медь, находится на уровне $\pm (4,2 \div 5,9) \%$, и достигает 15 % между крайними значениями (сталь 1ХН9Т и медь).

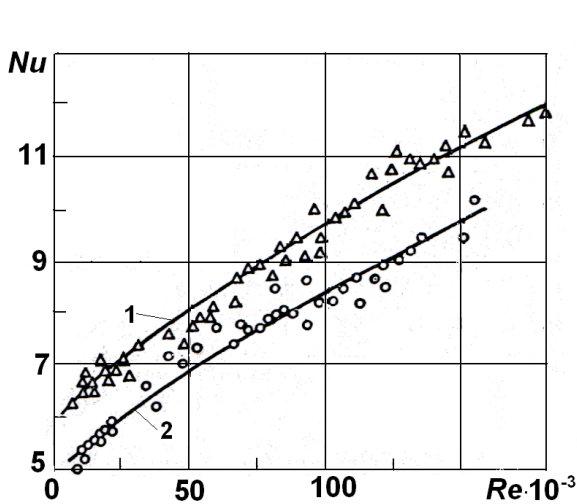


Рис. 30. Влияние материала стенки на теплоотдачу в потоке натрия [146]:
1 – сталь 1Х18Н9Т, 2 – медь

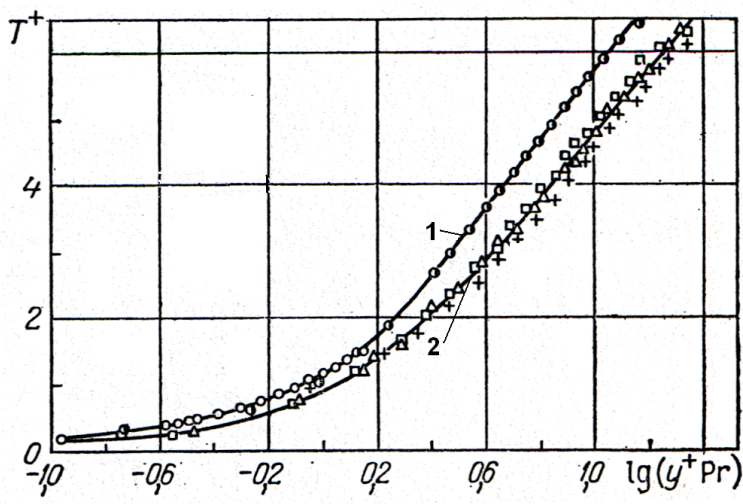


Рис. 31. Распределение температур в потоке натрия в трубах из меди и стали [146]
1 – медь: ○ – $Re = 1,41 \cdot 10^4$, $Pr = 0,0069$;
● – $Re = 9,34 \cdot 10^4$, $Pr = 0,0065$;
2 – сталь: □ – $Re = 1,39 \cdot 10^5$, $Pr = 0,0064$; Δ – $Re = 1,42 \cdot 10^5$, $Pr = 0,0064$; + – $Re = 1,73 \cdot 10^5$, $Pr = 0,0063$

2.2.3. Распределение температуры в потоках сред с $Pr \geq 1$

Измерения температуры в потоках с $Pr \geq 1$ вызывают определенные трудности, обусловленные рядом факторов. Основным фактором является малая толщина теплового пограничного слоя по сравнению с потоками жидких металлов с $Pr \ll 1$. Кроме того, вследствие низкой теплопроводности сред с $Pr \geq 1$ необходимо учитывать различия теплофизических свойств по сечению потока, в том числе и в погра-

ничном слое. Это достигается путем введения так называемого температурного фактора $\varphi = T_{cn}/\bar{T}_ж$ или отношения каких-либо свойств, например $\mu_{ст}/\mu_{ж}$.

Однако такой подход является слишком неточным, так как наблюдается сильное изменение температуры внутри пограничного слоя. Более того, большие различия температуры по сечению потока приводят к необходимости учитывать влияние термогравитационных эффектов в вертикальных и горизонтальных каналах. Влияние разной турбулентности внешнего потока на профили скорости и температуры отражено в результатах работ [148, 149]. Но приведенные данные являются противоречивыми. Так в [148] даже при $Re \sim 4 \cdot 10^5$ указанное влияние проявлялось по всей толщине пограничного слоя. В то время как в [149] это влияние обнаруживалось только во внешней области пограничного слоя.

В [150] представлены результаты по измерению профилей скорости и температуры при течении воздуха над плоской пластиной ($Pr = 0,71$). Для логарифмической области, где $30 < y^+ < 300$, получено соотношение $T^+ = (0,86 \pm 0,02) u^+$ и величина Pr_T по оценкам авторов составляет $Pr_T = 0,9 \pm 0,1$.

В [151] представлены данные экспериментальных измерений распределения температуры в потоке воды, текущем в прямоугольном канале размерами $0,35 \times 0,25$ мм при $Re = (2,48 \div 2,88) \cdot 10^5$ и $Pr = 7,27 \div 8,04$. Для логарифмической области эти данные описываются соотношением $T^+ = B \lg y^+ + C(Pr)$, где $C = 47$ при $Pr = 7,5$. Здесь величина $B = 4,85$ вместо $5,65$, как это получается из распределения скоростей.

Профиль температуры при течении воздуха в круглой трубе, измеренный Джонком и Ханраттом [47], описывался следующими соотношениями: $T^+ = 5,1 \lg y^+ + 3,3$ при $Re > 2,5 \cdot 10^4$ и $30 < y^+ < 300$; $T^+ = 4,96 \lg y^+ + 3,72$ при $Re = 7 \cdot 10^4$. Следует отметить, что расхождения между значениями коэффициентов, приведенные в формулах для расчета величины T^+ , являются достаточно большими. Таким образом, в настоящее время задача определения обобщенной зависимости $T^+ = f(y^+)$ или $T^+ = f(y^+ Pr)$ далека от завершения.

Интерпретация коэффициента турбулентной температуропроводности привела к выражению [152]

$$\frac{a_T}{av_*} = 0,0752 \left[1 + 2,245 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (2.34)$$

что никак не согласуется с соотношением Райхардта, сделанным ранее [153]:

$$\frac{a_T}{av_*} = 0,45 (y/R). \quad (2.35)$$

Сводка данных по характеристикам экспериментальных измерений профилей температуры в различных средах при $Pr \geq 1$ приведена в табл. 5.

Таблица 5. Сводка данных по исследованию полей температуры в средах с $Pr \geq 1$

Автор, год [источник]	Среда	Кол-во температ. профилей	Число Pr	Число $Re \cdot 10^{-3}$	Тип канала	Размер канала – диаметр трубы или $b \times h$, мм	Направление потока
1	2	3	4	5	6	7	8
Себан, 1951 [154]	воздух	5	0,7	5,4÷54	труба	37,8	
Слайчер, 1957 [119] 1958 [155]	воздух	–	0,7	14÷80	труба		
Рейнольдс, 1958 [155]	воздух	–	0,7	729÷2780	погранич. слой	–	
Джонк, 1962 [47]	воздух	5	0,7	18÷71	труба	76,4	↑
Беквит, 1963 [165]	вода	–	6,0	11÷19	труба		
Брандретт, 1965 [156]	воздух	–	0,7	34÷76	квадратный канал	95,7×95,7	↑
Перри, 1966 [154]	воздух	–	0,7	1800	погранич. слой		
Ахенбах, 1966 [158]	воздух	–	0,7	300÷200	погранич. слой		
Хишида, 1967 [158]	воздух	–	0,7	10÷81	труба		
Смит, 1967 [162]	вода	8	5,7	11÷44	труба		
Гоуен и Смит, 1967 [113] 1968 [49]	воздух вода этиленгликоль	4 5 5	0,7 5,9 14,3	16÷49 18,8÷42,7 14,4÷22,5	труба	50,8	↑
Таккен, 1968 [160]	воздух	–	0,7	70÷560	труба		

Таблица 5. Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8
Нойман, 1968 [164]	техническое масло	6	60 67 80 95 100 103	34,3 89,0 32,8 27,0 47,6 57,9	плоский канал		→
Чен, 1969 [151]	вода	4	7,27÷8,04	248÷278	плоский канал	250×350	
Пядишнос, 1969 [161] 1971 [33]	воздух вода вода трансформат. техн. масло	–	0,7 3,0 5,5 64	340÷870 870÷4400 400÷2400 350÷850	погранич. слой		
Симпсон, 1970 [166]	воздух	5	0,7	130÷2000	плоский канал		→
Шланчяускас, 1971 [61] 1972 [62] Жукаускас и Шланчяускас, 1973 [72]	воздух вода вода трансформат. техн. масло	4 1 9 2	0,7 3,0 5,45 67 90	340÷870 700÷4400 360÷2400 350÷850	погранич. слой	70×93	→
Кадва, 1972 [165]	этиленгликоль	4	14,3	6÷50	труба	36,4	↑
Кулешов, 1978 [100]	воздух	3	0,7	130÷2000	плоский канал		→
Снудерс, 1983 [150]	воздух	1	0,7	200	плоский канал	$b = 292$	→
Вей, 1989 [167]	вода		22,7	3000÷40000			

Выводы

1. Многочисленные экспериментальные и аналитические исследования турбулентного числа Прандтля (Pr_T) в широком диапазоне параметров (Re , Pr) не дают оснований для получения достаточно точных расчетных формул по теплообмену в трубах в связи с большими расхождениями в результатах значений Pr_T .

Причины этих расхождений — два обстоятельства. Во-первых, значение $Pr_T = v_T/a_T$ получается как частное от деления двух близких коэффициентов турбулентного обмена путем дифференцирования профилей скорости и температуры. Каждая производная определяется с некоторой ошибкой, и, как следствие, частное от деления таких производных находится с еще большей ошибкой. Второе обстоятельство обусловлено многофакторностью значений Pr_T , вызываемой турбулентностью в разных частях потока, физическими свойствами среды и стенки, величиной расстояния от поверхности и многими другими, возможно еще не выявленными, обстоятельствами.

Обзор расчетных корреляций для определения Pr_T дан А. Рейнольдсом [2] и Хасаном [168]. Однако аналитические расчеты величины Pr_T малопродуктивны в связи с необходимостью введения многих трудно проверяемых предположений. Принципиальные трудности могут быть решены лишь при повышении точности измерений полей скорости и температуры на разных средах преимущественно с $Pr \geq 1$.

2. Наиболее корректными для расчета интенсивности теплообмена при турбулентном течении в трубах является форма соотношений, полученных непосредственно из экспериментальных распределений температуры и скорости в потоке. Эти соотношения исключают погрешности, связанные с возможными явлениями на границе «стенка-жидкость», которые могут приводить к дополнительным термическим сопротивлениям и должны исследоваться отдельно. Точность эмпирических формул, используемых в инженерных расчетах, в ряде случаев оказывается ниже, чем это оценивают их авторы, если проводить сравнение с большим массивом экспериментальных данных. Причины такого эффекта установить трудно.

Если целью исследования является нахождение лишь общих закономерностей теплообмена в турбулентном потоке, когда не требуется высокая точность расчетных формул, то в большинстве случаев сравнение расчетных и экспериментальных данных проводят в малочувствительных координатах, например, $St = f(Re, Pr)$ или $St/\sqrt{\xi/8} = f_1(Re, Pr)$. При определении критерия Стантона $St = \alpha/\rho q w$ по опытным данным нет необходимости использовать какие-либо физические свойства, кроме плотности ρ и теплоемкости C_p , которые слабо зависят от температуры. Но такой подход, имеющий определенные преимущества, не позволяет получить правильный ответ о погрешности формул.

3. Вопрос о том, насколько результаты теоретических или полуэмпирических расчетов соответствуют действительности, может быть решен лишь на основе сравнения с опытными данными. Корректную проверку результатов расчетов по любым

моделям можно выполнить, только сравнивая рассчитанные и экспериментальные поля температур.

В большинстве же случаев сравниваются интегральные характеристики (например, числа Нуссельта), которые получаются из измерений температуры охлаждаемой (или нагреваемой) поверхности. При этом почти неизбежна неопределенность условий на поверхности (наличие отложений, окисных пленок и прочее). Целесообразно проводить эталонные эксперименты в условиях, когда большинство факторов (если не все!) контролируются

4. Характер зависимости $Nu(Pr)$ изменяется с изменением числа Прандтля:

$$Nu \sim Pr^{0,8-1} \text{ при } Pr \ll 1,$$

$$Nu \sim Pr^{0,4} \text{ при } Pr \approx 1,$$

$$Nu \sim Pr^{0,25} \text{ при } Pr \gg 1.$$

5. Для практических расчетов интенсивности теплообмена в каналах предпочтительно применять простые формулы пригодные для узких областей изменения чисел Прандтля, но при обязательном учете погрешностей термодинамических параметров потока теплоносителя и его теплофизических свойств.

Список литературы

1. Kays W.M. Turbulent *Prandtl* number – Where we are? – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1994, v. 116, No. 2, p. 284–295.
2. Reynolds A.J. The prediction of turbulent *Prandtl* and Schmidt number. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1975, v. 18, No. 9, p. 1055–1069.
3. Launder B.E. Second-moment closure and its use in modelling turbulent industrial flow. – *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1989, v. 9, No. 8, p. 963–985.
4. Nagano Y., Kim C. A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1988, v. 110, No. 3, p. 583–589.
5. Рогожкин С.А., Аксенов А.А., Жлуктов С.В., Осипов С.Л., Сазонова М.Л., Фадеев И.Д., Шепелев С.Ф., Шмелев В.В. Разработка модели турбулентного теплопереноса для жидкометаллического теплоносителя и ее верификация. – *Вычислительная механика сплошных сред*, 2014, т. 7, № 3, с. 306–316.
6. Бородулин В.И., Качанов Ю.С. универсальный механизм порождения пристенной турбулентности и детерминированная турбулентность. – *Механика жидкости и газа. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2014, № 4(3), с. 653–655.
7. Bae Y.Y. A new formulation of variable turbulent *Prandtl* number for heat transfer to supercritical fluids. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2016, v. 92, January, p. 792–806.
8. Duponcheel M., Briteux L., Manconi M., Winkelmanns G., Bartosiewicz Y. Assessment of RANS and improved near-wall modelling forced convection of low *Prandtl* numbers based on LES up to $Re_\tau = 2000$. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2014, v. 75, August, p. 470–482.
9. Liu C.-l., Zhu H.-r., Bai J.-t. New development of the turbulent *Prandtl* number models for the computation of film cooling effectiveness. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2011, v. 54, No. 4, p. 874–886.
10. Karlsson E., Gourdon M., Olausson L., Varmling L. Heat transfer for falling film evaporation of black liquor up to very high *Prandtl* numbers. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2013, v. 65, October, p. 907–918.
11. Shams A., roeflos F., Baglietto E., Laudeau S., Kenjeres S. Assessment and calibration of algebraic turbulent heat flux models of low-*Prandtl* fluids. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2014, v. 79, December, p. 589–601.
12. Кутателадзе С.С. Пристенная турбулентность. – Новосибирск: Наука, 1973.
13. Миллионщиков М.Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. – М.: Наука, 1963.
14. Моулден Т. Введение в описание явления турбулентности / В кн.: Турбулентность, принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена; Глава 2. – М.: Мир, 1980.
15. Зыбин К.П., Сирота В.А. Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности. – *Успехи физических наук*, 2015, т. 185, № 6, с. 593–611.
16. Nedderman R.N. The measurements of velocities in the wall region of turbulent liquid pipe flow. – *Chemical Engineering Science*, 1961, v.16, No. 1-2, p. 120–126.

17. Laufer J., Narayanan M.A.B. Main period of the turbulent production mechanism in a boundary layer. – *The Physics of Fluids*, 1971, v. 14, No. 1, p. 182–183.
18. Rao K.N., Narasimha R. Narayanan M.A.B. The “bursting” phenomenon in a turbulent boundary layer. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, v. 48, No. 2, p. 339–352.
19. Kim H.T., Kline S.J., Reynolds W.C. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, v. 50, No. 1, p. 130–160.
20. Corino E.R., Brodkey R.S., A visual investigation of the wall region in turbulent flow. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, v. 37, No. 1, p. 1–30.
21. Репик Е. У., Соседко Ю.П. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 312 с.
22. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности / Перевод с немец. Г.А. Вольперта, под ред. Л.Г. Лойцянского. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 204 с.
23. Пуанкаре А. Теория вихрей / Перевод с франц. А.А. Килина, под ред. А.В. Борисова. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 160 с.
24. Рюэль Д. Случайность и хаос / Перевод с франц. Н.А. Зубченко, под ред. А.В. Борисова. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 112 с.
25. Kline S.J., Runstadler P.W. Some preliminary results of visual of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary layer. – *Journal of Applied Mechanics*, 1959, v. 28, No. 2, p. 166–170.
26. Kline S.J., Reynolds W.C., Schraub P.A., Runstadler P.W. The structure of turbulent boundary layers. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, v. 30, No. 4, p. 741–773.
27. Nychas S.G., Hershey H.C., Brodkey R.S., A visual study of turbulent shear flows. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1973, v. 61, No. 3, p. 513–540.
28. Grass A.J. Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, v. 50, No. 2, p. 233–235.
29. Zarić Z. Etude statistique de la turbulence parietale. – Belgrade: Institut “Boris Kidric”, Laboratoire de transfert thermique, 1974. – 148 p.
30. Blackwelder R.E., Kaplan R.E. On the wall structure of the turbulent boundary layer. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1976, v. 76, No. 1, p. 89–112.
31. Eckelmann H., Nychas S.G., Brodkey R.S., Wallace J.M. Vorticity and turbulence production in pattern recognized turbulent flow structures. – *Physics of Fluids*, 1977, v. 20, No. 10, p. 225–231.
32. Falco R.E. Coherent motions in the outer region of turbulent boundary layer. – *Physics of Fluids*, 1977, v. 20, No. 10, p. 124–132.
33. Пядишюс А., Шланчяускас А. Турбулентный перенос в пристенных слоях. – Вильнюс: Моклас, 1987, с. 53–62.
34. Trinh K.T. Reflections on a penetration theory of turbulent heat transfer. – 2010, Сайт Интернет <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1009/1009.2280.pdf>
35. Kachanov Y.S. On universal nonlinear mechanism of turbulence production in wall shear flows / In: *Proceedings of the 10th International Conference on Methods of Aerophysical Research, Part II*. – Новосибирск: Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 2000, p. 84–91.

36. Корнилов В.И., Шквар Е.А. Моделирование турбулентных пограничных слоев на теле вращения при помощи разрушителей крупных вихрей. – *Теплофизика и аэромеханика*, 2010, т. 17, № 3, с. 335–348.
37. Галимзянов Ф.Г., Галимзянов Р.Ф. Теория внутреннего турбулентного движения. – Уфа: Эксперт, 1999. – 352 с.
38. Блом Ж., Вриз Д.А. О величине турбулентного числа Прандтля / В сб. «Тепло- и массоперенос»: Труды 3-го Всесоюзного совещания по тепло- и массопереносу; Под общ. ред. А.В. Лыкова и Б.М. Смольского. – М.: Энергия, 1961, т. 1, с. 147–154.
39. Blom J. An experimental determination of the turbulent *Prandtl* number in a developing temperature boundary layer / *Thesis of Doctor Technical Science*. – Eindhoven Technical High School, 1970, pp. 152; Сайт Интернет <https://pure.tuei.ne/ws/files/3487217/51512.pdf>.
40. Corcoran W.H., Page F., Schlenger W.G., Sage B.H. Temperature gradient in turbulent gas streams. – *Industrial and Engineering Chemistry*, 1952, v. 44, p. 410–430.
41. Sleicher C.A. Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow. – *Transactions of ASME*, 1958, v. 80, p. 693–704.
42. Sage B.H., Venezian E. Temperature gradients in turbulent gas streams: Effect of viscous dissipation on the evaluation of total conductivity. – *Journal of American Institute of Chemical Engineers (AIChE)*, 1961, v. 7, p. 688–692.
43. Isakoff S.E., Drew T.B. Heat and momentum transfer in turbulent flow of mercury / General Discussion on Heat Transfer. – Institute of Mechanical Engineers and ASME, 1951, p. 405–449.
44. Brown H.E., Amstead B.H., Short B.E. The transfer of heat and momentum in a turbulent stream of mercury. – *Transactions of ASME*, 1957, v. 79, p. 279–285.
45. Ludwig H. Bestimmung des Verhältnisses der Austauschkoefizienten für Wärme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten. – *Zeitschrift für Flugwissenschaften*, 1956, No. 4, s. 73–81.
46. Johnson D.S. Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature. – *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1959, v. 26, p. 325–336.
47. Johnk R.E., Hanratty T.J. Temperature profiles of air in a pipe. Parts I and II. – *Chemical Engineering Science*, 1962, v. 17, p. 867–892.
48. Sesonke A., Schrock S.L., Buyoco E.H. Eddy diffusivity ratios for mercury flowing in a tube. – *Chemical Engineering Progress Symposium Series*, 1965, v. 61, No. 57, p. 101–107.
49. Gowen R.A., Smith J.W. Turbulent heat transfer from smooth and rough surfaces. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1968, v. 11, No. 11, p. 1657–1673.
50. Галин Н.М. О тензоре коэффициентов турбулентной теплопроводности. – *Теплофизика высоких температур*, 1975, т. 13, № 5, с. 984–988.
51. Галин Н.М. О коэффициентах диффузии в анизотропной турбулентности. – *Известия АН СССР. Серия: Энергетика и транспорт*, 1980, № 6, с. 130–139.
52. Quarmby A., Quirk R. Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in turbulent flow in plain tube. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1972, v. 15, No. 11, p. 2309–2327.

53. Quarmby A., Quirk R. Axisymmetric and non-axisymmetric turbulent diffusion in a plain circular tube at high Schmidt number. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1974, v. 17, No. 1, p. 143–147.
54. Ибрагимов М.Х., Субботин В.И., Таранов Г.С. Определение корреляционной связи между пульсациями скорости и температуры в турбулентном потоке воздуха в трубе. – *Доклады АН СССР*, 1968, т. 183, № 5, с. 1032–1035.
55. Галин Н.М., Грошев А.И. Влияние продольной турбулентной диффузии на закономерности теплообмена в трубах. – *Теплоэнергетика*, 1979, № 5, с. 6–12.
56. Галин Н.М., Кириллов П.Л. Тепломассообмен (в ядерной энергетике). – М.: Энергоатомиздат, 1987, с. 152–160.
57. Elena M. Etude experimentale de la turbulence au voisinage de la paroi d'un tube legerement chauffe. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1977, v. 20, No. 9, p. 935–944.
58. Bremhorst K., Bullock K.J. Spectral measurements of temperature and longitudinal velocity fluctuations in fully developed pipe flow. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1970, v. 13, No. 8, p. 1313–1329.
59. Ибрагимов М.Х., Меркулов В.И., Субботин В.И. Статистические характеристики пульсаций температуры стенки теплообменника при высоких тепловых потоках / В сб.: Жидкие металлы. – М.: Атомиздат, 1967, с. 71–81.
60. Шланчяускас А.А., Дрижюс М-Р. М. Профили температуры в области стенки в турбулентном пограничном слое различных жидкостей. – *Труды АН Литовской ССР*, Сер. Б, Вильнюс, 1971, Т. 1, № 64, с. 189–203.
61. Шланчяускас А.А., Вайтекунас П.П., Жукаускас А.А. Метод расчета трения и теплообмена в турбулентном слое с переменными физическими свойствами. – *Труды АН Литовской ССР*, Сер. Б, Вильнюс, 1971, Т. 4, № 67, с. 85–100.
62. Polyakov A.F. Temperature fluctuations near the surface washed by turbulent flow / In: *Proceedings of Disa Conference "Fluid dynamic measurements in the industrial and medial environments"*, April 1972, University of Leicester / Ed. by David J. Cockrell. – 1972, v. 1, p. 243–249.
63. Поляков А.Ф. Влияние стенки на пульсации температуры в вязком подслое. – *Теплофизика высоких температур*, 1974, т. 12, № 2, с. 328–337.
64. Бобков В.П., Грибанов Ю.И., Ибрагимов М.Х., Номофилов Е.В., Субботин В.И. Измерение интенсивности пульсаций температур при турбулентном течении ртути в трубе. – *Теплофизика высоких температур*, 1965, т. 3, № 5, с. 708–716.
65. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Перевод с 5-го немец. изд. под ред. Л.Г. Лойцянского. – М.: Наука, Главн. Редакция физ.-мат. литературы, 1964, с. 635–636.
66. Reichardt H. Der Einfluss der wandnahen Strömung auf der turbulenten Wärmeübertragung. – *Mitteilungen aus dem Max-Planck Institut für Strömungsforschung*, 1950, No. 3, s. 1–63.
67. Rotta J.C. Temperatur verteilungen in der turbulenten Grenzschicht an der een Platte. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1964, v. 7, No. 2, p. 215–228.
68. Петухов Б.С. Основы полуэмпирической теории турбулентности / В кн.: Теплообмен в ядерных энергетических установках; 3-е изд., перераб. и доп. / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалев, С.Л. Соловьев. – М.: Издательство МЭИ, 2003, с. 181–216.

69. Blackwell B.F., Kays W.M., Moffat R.J. The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the heat transfer behavior with adverse pressure gradients / *Report No. HMT-16*. – Stanford: Stanford University, Department of Mechanical Engineering, Thermosciences Division, 1972.
70. Hollingsworth D.K., Kays W.M., Moffat R.J. Measurement and prediction of the turbulent thermal boundary layer in water on flat and concave surfaces / *Report No. HMT-41*. – Stanford: Stanford University, Department of Mechanical Engineering, Thermosciences Division, 1989.
71. Шланчяускас А.А., Пядишюс А.А., Жукаускас А.А. Универсальные профили температур и турбулентное число Прандтля в пограничном слое на пластине в потоке жидкости. – *Труды АН Литовской ССР*, Сер. Б, Вильнюс, 1971, Т. 2, № 65, с.153–160.
72. Жукаускас А.А., Шланчяускас А.А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости / *Теплофизика 5*, Ин-т физ.-техн. проблем энергетики АН Литовской ССР. – Вильнюс: Издательство «Минтис», 1973. – 342 с.
73. Jenkins R. Variation of the eddy conductivity with *Prandtl* modulus and its use in prediction of turbulent heat transfer coefficients / In: *Proceeding of the Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*. – Stanford: Stanford University Press, 1951.
74. Tien C.L. On Jenkins model of eddy diffusivities for momentum and heat. – *Transactions of ASME, Journal of Heat Transfer*, 1961, v. 83, No. 3, p. 389–390.
75. Воскресенский К.Д., Турилина Е.С. Приближенный расчет теплоотдачи расплавленных металлов / В сб.: *Теплопередача и тепловое моделирование*; под ред. акад. М.В. Кирпичева. – М.: Издательство АН СССР, 1959.
76. Пупко В.Я. Математическая модель турбулентного движения, учитывающая эффекты молекулярной теплопроводности и вязкости / В кн.: *Применение теории возмущений в инженерных задачах ядерной энергетики* / А.В. Гулевич, А.В. Зродников, В.Я. Пупко, А.А. Шиманский. – М.: Энергоатомиздат, 1993, с. 177–192.
77. Yakhot V., Orszag S.A., Yakhot A. Heat transfer in turbulent fluids – 1. Pipe flows. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1987, v. 30, No. 1, p. 15–22.
78. Skupinski E., Tortel J., Vautrey L. Determination des coefficients de convection d'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1965, v. 8, No. 6, p. 937–951.
79. Buhr H.O., Carr A.D., Balzhiser R.E. Temperature profiles in liquid metals and the effect of superimposed free convection in turbulent flow. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1968, v. 11, No. 4, p. 641–654.
80. Sleicher C.A., Awad A.S., Notter K.H. Temperature and eddy diffusivity profiles in NaK. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1973, v. 16, No. 8, p. 1565–1575.
81. Максин П.Л., Петухов Б.С., Поляков А.Ф. Расчет турбулентного переноса импульса и тепла при течении в трубах несжимаемой жидкости и газа / В сб.: *Вопросы конвективного и радиационно кондуктивного теплообмена*. – М.: Наука, 1980, с. 5–42.
82. Петухов Б.С. Вопросы теплообмена: избранные труды / Отв. ред. В.А. Кириллин. – М.: Наука, 1988, с. 97.

83. Khabakhpasheva E.M., Perepelitza B.V. Measurement of temperature, velocity fields and turbulent Prandtl number in near-wall region / In: *Proceedings of the 5th International Heat Transfer Conference*, 3-7 September 1974, Tokyo, Japan. – На сайте Интернет www.ihtcdigitallibrary.com, Table of Content, Section “Forced Convection”, p. 134–136.
84. Kader B.A., Jaglom A.M. Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1972, v. 15, No. 12, p. 2329–2351.
85. Кадер Б.А., Яглом А.И. Универсальный закон тепло- и массопереноса от стенки при больших числах Рейнольдса и Пекле. – *Доклады АН СССР*, 1970, т. 190, № 1, с. 65–68.
86. Петухов Б.С. Турбулентность в теории теплообмена / В сб.: «Тепломассообмен-VI» Проблемные доклады 6-ой Всесоюзной конференции по тепломассообмену. – Минск, 1981, ч. 1, с. 21–51.
87. Kays W.M., Crawford M.E., Weigand B. Convective heat and mass transfer / 4th ed. – McGraw Hill: Boston, 2005.
88. Hishida M., Nagano Y., Tagawa M. Transport process of heat and momentum in the wall region of turbulent pipe flow / In: *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, 17-22 August 1986, San Francisco, USA. – Washington D.C., 1986, v. 3, p. 925–930.
89. Malhotra A., Kang S.S. Turbulent Prandtl number in circular pipes. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1984, v. 27, No. 11, p. 2158–2161.
90. Chen F., Huai X., Cai J., Li X., Meng R. Investigation on the applicability of turbulent-Prandtl-number models for liquid-bismuth eutectic. – *Nuclear Engineering & Design*, 2013, v. 257, p. 128–133.
91. Cheng X., Tak Nam-il. Investigation on turbulent heat transfer to liquid-bismuth eutectic flows in tubes. – *Nuclear Engineering & Design*, 2006, v. 236, p. 385–393.
92. Aoki S. A consideration on the heat transfer in liquid metal. – *Bulletin of Tokyo Institute of Technology*, 1963, v. 54, p. 63–73.
93. Jischa M., Rieke H.B. About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers from modeled transport equations. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1979, v. 22, p. 1547–1555.
94. Von Karman Th. Über laminare und turbulente Reibung (About laminar and turbulent friction). – *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1921, Band 1, No. 4, s. 233–252.
95. Бай Ши-и. Турбулентное течение жидкостей и газов / Перевод с англ. под ред. К.Д. Воскресенского – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 344 с.
96. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / 6-е изд. перераб. и доп. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
97. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. – *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1951, Band 31, No. 7, s. 208–219.
98. Левченко Ю.Д., Ушаков П.А. Новая формула турбулентного профиля скорости для потока жидкости в круглых трубах: Препринт ФЭИ-561. – Обнинск: ФЭИ, 1975.

99. Калбалиев Ф.И. Определение средней температуры и концентрации при турбулентном течении жидкости в трубе и в пограничном слое на пластине. – *Инженерно-физический журнал*, 1975, т. 29, № 2, с. 244–250.
100. Кулешов В.А., Поляков А.Ф., Шехтер Ю.Л. Экспериментальное исследование полей скорости и температуры при турбулентном течении воздуха с переменными свойствами. – *Теплофизика высоких температур*, 1978, т. 16, № 2, с. 332–338.
101. Коэффициенты сопротивления трения в каналах разной формы. Турбулентное течение / В кн.: Справочник по теплогидравлическим расчетам в ядерной энергетике / Под ред. П.Л. Кириллова, Том 1. – М.: ИздАТ, 2010, с. 37–47.
102. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975.
103. Петухов Б.С., Поляков А.Ф., Кулешов В.А. Распределение температуры при турбулентном течении воздуха с постоянными свойствами. – *Труды МЭИ*, 1976, вып. 313, с. 40–44.
104. Pai S.I. On turbulent flow in circular pipe. – *Journal of Franklin Institute*, 1953, v. 256, No. 4, p. 337–352.
105. Haberstroh R.D., Baldwin L.W. Application of a simplified velocity profile to prediction of pipe-flow heat transfer. – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1968, v. 90, No. 2, p. 191–198.
106. Pierce F.G., Ma Allster J.E., Tennant M.H. A review of near-wall similarity models in three-dimensional turbulent boundary layers. – *Trans. ASME, Journal of Fluids Engineering*, Ser. I, 1983, v. 105, p. 251–256.
107. Баренблатт Г.И., Корин А.Дж., Простокишин В.М. Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса. – *Успехи физических наук*, 2014, т. 184, № 3, с. 265–272.
108. Zagarola M.V., Smits A.V. Mean flow scaling in turbulent pipe flow. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1998, v. 873, p. 33–79.
109. Praskovsky A.S., Onsley S. Measurement of the Kolmogorov constant and intermittency exponent at very high Reynolds number. – *Physics of Fluids*, 1994, v. 6, No. 9, p. 2886–2889.
110. Вигдорович И.И. Описывает ли степенная формула турбулентный профиль скорости в трубе? – *Успехи физических наук*, 2015, т. 185, № 2, с. 213–216.
111. Баренблатт Г.И., Корин А.Дж., Простокишин В.М. К проблеме турбулентных течений в трубе при очень больших числах Рейнольдса. – *Успехи физических наук*, 2015, т. 185, № 2, с. 217–220.
112. Trinh K.T. A similarity analysis for heat transfer in Newtonian and power law fluids using the instantaneous wall shear stress. – 2010, <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1009/1009.0092.pdf>
113. Gowen R.A., Smith Y.W. The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pipe flow. – *Chemical Engineering Science*, 1967, v. 22, No. 2, p. 1701–1711.
114. Thomas L.C. Temperature profiles for liquid metals and moderate-Prandtl-number fluids. – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1970, v. 92, No. 3, p. 565–567.

115. Кириллов П.Л., Марков Ю.М., Слободчук В.И. Распределение температуры и закон теплообмена при турбулентном течении в круглой трубе: *Препринт ФЭИ-1703*. – Обнинск: ФЭИ, 1985.
116. Luikov A.V., Aleksashenko V.A., Aleksashenko A.A. Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1971, v. 14, No. 8, p. 1047–1056.
117. Lin K.Y., Chow L.C. Effects of wall conduction on heat transfer for turbulent flow in a circular tube. – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1984 v. 106, No. 3, p. 597–604.
118. Sakakibara M., Endoh K. Effect of conduction in wall on heat transfer with turbulent flow between parallel plates. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1977, v. 20, No. 5, p. 507–516.
119. Sleicher C.A., Tribus M. Heat transfer in a pipe with turbulent flow and arbitrary wall temperature distribution. – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1957, v.79, p. 789–797.
120. Петухов Б.С., Юшин А.Я. О теплообмене при течении жидкого металла в ламинарной и переходной областях. – *Доклады АН СССР*, 1961, т. 136, № 6, с. 1321–1324.
121. Кириллов П.Л. Анализ расчетных формул по теплообмену при турбулентном течении в трубах: *Обзор ФЭИ-0230*. – М.: ЦНИИАтоминформ, 1988.
122. Субботин В.И., Ибрагимов В.Х., Номофилов В.Е. Обобщающая зависимость коэффициента турбулентного переноса тепла в потоке жидкости. – *Теплофизика высоких температур*, 1965, т. 3, № 3, с. 421–426.
123. Субботин В.И., Ибрагимов В.Х., Номофилов В.Е. Измерение полей температуры при турбулентном течении ртути в трубе. – *Теплоэнергетика*, 1963, № 6, с. 70–74.
124. Кадер Б.А., Аронов А.П. Статистический анализ экспериментальных работ по тепло- и массоотдаче при больших числах Прандтля. – *Теоретические основы химической технологии*, 1970, т. 4, № 5, с. 637–652.
125. Бобков В.П., Ибрагимов М.Х., Расчет коэффициентов турбулентного переноса тепла при течении жидкости в трубе. – *Атомная энергия*, 1968, т. 24, № 5, с. 442–447.
126. Ибрагимов М.Х., Субботин В.И., Бобков В.П. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. – М.: Атомиздат, 1978. – 296 с.
127. Бобков В.П., Ибрагимов М.Х., Саванин Н.К. Теплообмен при турбулентном течении различных теплоносителей в кольцевых зазорах. – *Теплофизика высоких температур*, 1975, т. 13, № 4, с. 779–786.
128. Low Prandtl number thermal-hydraulics / В кн.: Handbook on lead-bismuth eutectic alloy and lead properties, materials, compatibility, thermal hydraulics and technologies. – OECD-NEA No. 7268, 2015, p. 651–681; Сайт Интернет <https://www.oecd-neo.org/science/pubs/2015/7268-lead-bismuth-2015.pdf>
129. Кириллов П.Л., Субботин В.И., Суворов М.Я., Троянов М.Ф. Исследование теплоотдачи в трубе к сплаву натрий-калий / В сб.: Вопросы теплообмена. – М. Издательство АН СССР, 1959, с. 80–95.

130. Кириллов П.Л., Субботин В.И., Суворов М.Я., Троянов М.Ф. Теплоотдача в трубе к сплаву натрия с калием и к ртути. – *Атомная энергия*, 1959, т. 6, № 4, с. 382–389.
131. Пирогов М.С. Теплоотдача к натрию при малых числах Пекле. – *Атомная энергия*, 1960, т. 8, № 4, с. 367–368.
132. Субботин В.И., Ибрагимов М.Х., Ивановский М.Н., Арнольдов М.Н., Номофилов В.Е. Теплоотдача при турбулентном течении жидких металлов в трубах. – *Атомная энергия*, 1961, т. 11, № 2, с. 133–139.
133. Субботин В.И., Паповянец А.К., Кириллов П.Л., Суворов М.Я., Ивановский М.Н. Изучение теплоотдачи к жидкому натрию в трубах. – *Атомная энергия*, 1962, т. 13, № 4, с. 380–382.
134. Субботин В.И., Ибрагимов М.Х., Номофилов В.Е. Теплоотдача на участке тепловой стабилизации при турбулентном течении жидких металлов в трубе. – *Атомная энергия*, 1962, т. 13, № 2, с. 155–161.
135. Кокорев Л.С., Ряпосов В.Н. Измерения распределения температуры в турбулентном потоке ртути в круглой трубе / В сб.: Жидкие металлы. – М.: Госатомиздат, 1963, с. 124–138.
136. Боришанский В.М., Заблочкая Т.В., Иващенко Н.И. Исследование теплоотдачи при течении ртутит в горизонтальных и вертикальных трубах / В сб.: Конвективный теплообмен в двухфазных и однофазных потоках. – М.: Энергия, 1964, с. 350–362.
137. Боришанский В.М., Заблочкая Т.В., Иващенко Н.И. Исследования теплообмена и полей температуры при турбулентном движении металлического натрия в трубах. – *Ibid*, с. 363–377.
138. Schrock S.L. Eddy diffusivity ratios in liquid metals. – *Ph. D. Dissertation*, Purdue University, USA, 1964.
139. Амплеев Н.А., Кириллов П.Л., Субботин В.И., Суворов М.Я. Теплообмен жидкого металла в вертикальной трубе при низких числах Re / В сб.: Жидкие металлы. – М.: Атомиздат, 1967, с. 15–32.
140. Taccoen L. Contribution a l'etude des echanges thermiques en ecoulement turbulent dans un tube lisse. Application aux metaux liquides. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1967, v. 10, No. 12, p. 1649–1660.
141. Buhr H.O., Horsten E.A., Carr A.D. The distortion of turbulent velocity and temperature profiles on heating, for mercury in a vertical pipe. – *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer*, 1974 v. 96, No. 2, p. 152–158.
142. Кириллов П.Л. Обобщение опытных данных по переносу тепла в жидких металлах. – *Атомная энергия*, 1962, т. 13, № 5, с. 484–486.
143. Кириллов П.Л., Ушаков П.А. Теплообмен жидких металлов: особенности, методы исследований и основные зависимости. – *Теплоэнергетика*, 2001, № 1, с. 49–56.
144. Ибрагимов М.Х., Субботин В.И., Ушаков П.А. Исследование теплоотдачи при турбулентном течении в трубах тяжелых жидких металлов. – *Атомная энергия*, 1960, т. 8, № 1, с. 54–56.
145. Кириллов П.Л. О влиянии теплофизических свойств поверхности на теплоотдачу при турбулентном течении. – *Инженерно-физический журнал*, 1986, т. 50, № 3, с. 501–512.

146. Кириллов П.Л., Галин Н.М., Грошев А.И., Слободчук В.И. О влиянии свойств стенки на теплоотдачу при турбулентном течении жидких металлов в трубах. – *Теплоэнергетика*, 1984, № 3, с. 63–64.
147. Виноградов В.Н., Катан И.Б., Кириллов П.Л. Статистический анализ данных по теплоотдаче жидких металлов в круглых трубах из разных материалов / *Препринт ФЭИ-1639*. – Обнинск: ФЭИ, 1984.
148. Дыбан Е.П., Эпик Э.Я. Теплоперенос в пограничном слое пластины, обтекаемой турбулизированным воздушным потоком / В сб.: Теплообмен 1978. – М.: Наука, 1980, с. 64–75.
149. Шланчяускас А.А., Пядишюс А.А. Влияние турбулентности внешнего течения на перенос тепла в турбулентном пограничном слое / В сб.: Теплообмен 1978. – М.: Наука, 1980, с. 76–78.
150. Snuders A.L., Koppius A.M., Nieuwvelt C. An experimental determination of the turbulent Prandtl number in the boundary layer for air flow over a flat plate. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1983, v. 26, No. 3, p. 425–431.
151. Che Pen Chen. Etude experimentale de la couche limite thermique turbulente dans l'eau. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1969, v. 12, No. 1, p. 61–70.
152. Eckelman L.D., Hanratty T.J. Interpretation of measured variation of the eddy conductivity. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1972, v. 15, No. 11, p. 2231–2239.
153. Reichardt H. The principles of turbulent heat transfer / *Technical Memorandum NACA. 1408*. – Washington, 1957. – 47 pp.
154. Seban R.A., Shimazki T.T. Temperature distributions for air flowing turbulently in a smooth heated pipe / *Proceedings of General Discussion on Heat Transfer*. – London: Institute of Mechanical Engineers and ASME, 1951.
155. Reynolds W.C., Kays W.M., Kline S.J. Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer. III. Arbitrary wall temperature and heat flux / *NASA Memorandum - NASA Memo 12-1-58W*. – Washington: DC, 1958, 53 pp.
156. Brundrett E., Baines W.D., Pregrym J., Burroughs P.R. Inner and outer law descriptions of temperature and velocity in two- and three dimensional boundary layers. – *AGARDograph*, 1965, v. 97, Part 2, p. 855.
157. Perry A.E., Bell J.B., Joubert P.N. Velocity and temperature profiles in adverse pressure gradient turbulent boundary layers. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1966, v. 25, p. 299–320.
158. Achenbach E. Beitrag zur Messung der örtlichen Wärmeübergangszahl in turbulenten Reibungsschichten bei erzwungener Konvektion. – *Glasstechnische Berichte*, 1966, Band 39, s. 217–225.
159. Hishida M. Turbulent heat transfer and temperature distribution in the thermal entrance region of a circular pipe. – *Bulletin of JSME*, 1967, v. 10, p. 113–123.
160. Taccoen L. Mesure des profiles de temperature dans ecoulement turbulent d'air dans un tube (fluide incompressible) / *Commun. a l'ecole d'ete intern sur transfert de chaleur et de masse*. – Yugoslavie: Herced-Novi, 1968.
161. Пядишюс А.А. Турбулентное число Прандтля и универсальные температурные профили при различных числах Прандтля / *Автореферат кандидатской диссертации*. – Каунаский политехнический институт.

162. Smith J.W., Gowen R.A., Wasmund B.O. Eddy diffusivities and temperature profiles for turbulent heat transfer to ware in pipes. – *Chemical Engineering Progress Symposium Series*, 1967, v. 63, p. 92–10
163. Beckwith W.F., Fahien R.W. Determination of turbulent thermal diffusivities for liquid flow in pipes / *USAEC Report IS-734*. – Iowa State University of Science and Technology, 1963.
164. Neuman I.C. Transfert de chauleur en regime turbulent pour les grands numbers de Prandtl. – *Informes Aueral et Therm*, 1968, Vol. 5, No. 17, p. 4–20.
165. Kudva A.K., Sesonke A. Structure of turbulent velocity and temperature fields in ethylene glycol pipe flow at low Reynolds number. – *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1972, v. 15, No. 1, p. 127–145.
166. Simpson R.L., Wnितteh D.G., Moffat R.G. An experimental study of turbulent Prandtl number of air with injection and suction. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1970, v. 13, No. 1, p. 125–143.
167. Wei T., Willmarth W.W. Reynolds number effects on the structure of a turbulent channel flow. – *Journal of Fluid Mechanics*, 1989, v. 204, No. 7, p. 57–95.
168. Hasan B.O. Turbulent Prandtl number and its use in prediction of heat transfer coefficient for liquids. – *Nahrain University, College of Engineering Journal (NUCEJ)*, 2007, v. 10, No. 1, p. 53–64.